الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي — دورة 2020

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات — المدة :4 سا و 30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين**

**الموضوع الأول**

## التمرين الأول : ( 04 نقاط )

$(u_n)$ المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1 أ- أحسب $u_1$ و $u_2$ ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<3$

2 لتكن $(v_n)$ متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

أ -بين أن $(v_n)$متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$

ب أكتب $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ ثمّ احسب نهاية المتتالية $(u_n)$ .

3 -$(w_n)$ المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n=\dfrac{3}{u_n}$ ،نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$.

أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n=1-v_n$

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $S_n=n+1+\dfrac{8}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

ج. أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$ .

## التمرين الثاني : ( 04 نقاط )

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ،1 ، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 ( الكرات لانفرق بينها باللمس ) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

"A الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

ب. أحسب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X

## التمرين الثالث : ( 05 نقاط )

1. عين العددين المركبين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $\begin{cases} \alpha+\beta=-1 \\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i \end{cases}$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\right)$ نعتبر النقط $I$ و $A$ و $B$ لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$ .

أ –أنشئ النقط $I$ و $A$ و $B$

ب عين $z_w$ لاحقة النقطة $w$ مركز الدائرة $(C)$ ذات القطر $[AB]$

3. $D$ نقطة لاحقتها $z_D=\dfrac{3+9i}{4+2i}$ أكتب $z_D$ على شكل الجبري ثم بين أن النقطة $D$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$.

4. $E$ نقطة من الدائرة $(C)$ لاحقتها $z_E$ حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ –أكتب العدد $z_E+\dfrac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

ب استنتج أن $z_E=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}i$

## التمرين الرابع : ( 07 نقاط )

I) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$ .

1. احسب نهايات الدالة $h$ عند $0$ وعند $+\infty$ .
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. احسب $h(1)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ .

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا .
2. بين انه من اجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيرات.
3. أ) بين ان المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ عند $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ .

4. بين ان المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني $(C_f)$ في نقطة $A$ يطلب تعيين احداثيها
5. ارسم $(\Delta)$ و $(d)$ و $(C_f)$ .
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=m$.

انتهى الموضوع الأول

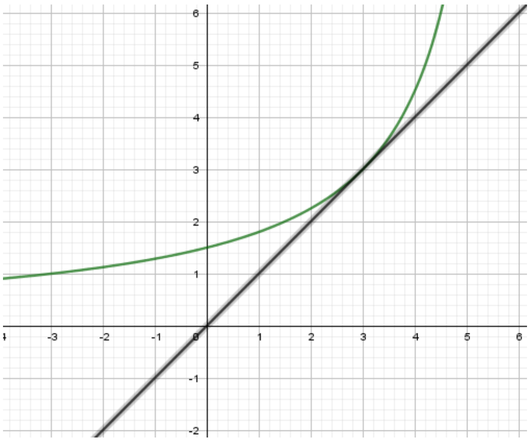
# الموضوع الثاني

## التمرين الأول : ( 04 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، $(c_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ و $(\Delta)$ المستقيم ذي المعادلة $y=x$



1. أ–بإستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ و $u_3$ .

ب .– ضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ وتقاربها.

2. أ– برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n<3$

ب– استنتج اتجاه تغير $(u_n)$ . هل $(u_n)$ متقاربة ؟ برر

3. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على ℕ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ– برهن أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تحديد أساسها $r$ وحدها الاول $v_0$

ب– اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ .

هـ– احسب بدلالة $n$ المجموعين: $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ و $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+\ldots+v_n\times u_n$.

## التمرين الثاني : ( 05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ .

2) إذا كان $x$ عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv 0[6]$ فإن $x\equiv 0[6]$ .

3) إذا كان $x^2\equiv y^2[17]$ فإن $x\equiv y\,[17]$ .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x-5y=3$ المعرفة في $Z^2$ ، هي مجموعة الثنائيات $(x,y)$ من الشكل $(4+10k\,;9+24k)$ مع $k\in Z$ .

5) $M$ و $N$ عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان $M$ يقبل القسمة على 27 فإن $M-N$ يقبل القسمة على 27.

## التمرين الثالث : ( 04 نقاط)

صندوق يحتوي على $n$ كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. ما احتمال سحب كرتين بيضاوين

2. نسمى $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n)=\dfrac{n^2-n+18}{(n+7)(n+6)}$ .

ب أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق

. عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. عين قيم المتغير العشوائي X .

ب. عين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي.

## التمرين الرابع : ( 07 نقاط)

I) نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$ .

1) احسب نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ حيث $1.27<\alpha<1.28$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على 

II)نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^x-1)(2-x)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1) –احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ .

2) أ– بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ استنتج أن المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته

ب– ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ معادلته $y=x-2$ .

3) بين ان $f'(x)=e^x.g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ و شكل جدول تغيراتها.

4) بين ان $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ .

5) ارسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ .

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الموضوع الأول شعبة التقني رياضي البكالوريا التجريبية 2021

## التمرين الأول : ( 04 نقاط )

$(u_n)$ المتتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$.

1. أ- حساب $u_1$ و $u_2$ : $u_1=\dfrac{4u_0}{1+u_0}=\dfrac{4}{2}=2$ و $u_2=\dfrac{4u_1}{1+u_1}=\dfrac{4\times 2}{1+2}=\dfrac{8}{3}$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<3$ :

لدينا $0<u_0<3$ محققة .

نفرض أن $0<u_n<3$ صحيحة و نبرهن أن $0<u_{n+1}<3$ صحيحة

لدينا $u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{1+u_n}$ يعني أن $u_{n+1}=4-\dfrac{4}{1+u_n}$

$0<u_n<3$ بإضافة 1 نجد $1<1+u_n<4$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{1+u_n}<1$ بالضرب في $-4$ نجد

$-1<-\dfrac{4}{1+u_n}<-4$ بإضافة 4 نجد $0<4-\dfrac{4}{1+u_n}<3$ إذن $0<u_{n+1}<3$ محققة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0<u_n<3$

2. لتكن $(v_n)$ متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$

أ- إثبات أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ : $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=\dfrac{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)-3}{\left(\dfrac{4u_n}{1+u_n}\right)}$ أي أن

$v_{n+1}=\dfrac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{u_n-3}{u_n}\right)$ إذن $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n$ و منه $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0=\dfrac{u_0-3}{u_0}$ أي $v_0=-2$

ب كتابة $v_n$ ثم $u_n$ بدلالة $n$ : $v_n=v_0.q^n$ أي $v_n=-2.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ و لدينا $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n}$ يعني

$v_n=1-\dfrac{3}{u_n}$ و منه $v_n-1=-\dfrac{3}{u_n}$ أي أن $\dfrac{1}{v_n-1}=-\dfrac{u_n}{3}$ إذن $u_n=-\dfrac{3}{v_n-1}$ بالتعويض نجد

$u_n=-\dfrac{3}{\left(\dfrac{-2}{4^n}\right)-1}$ أي أن $u_n=\dfrac{3\times 4^n}{2+4^n}$ .

حساب نهاية المتتالية $(u_n)$ : $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{3\times 4^n}{4^n}\right)=3$ .

3. المتتالية المعرفة $(w_n)$ من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع
. $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + .... + w_n$

أ. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $w_n = 1 - v_n$ لدينا $w_n = \frac{3}{u_n}$ و لدينا $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ يعني $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$ بالجمع نجد $w_n + v_n = 1$ و منه $w_n = 1 - v_n$ و هو المطلوب .

ب. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

$S_n$ هو مجموعة متتالية هندسية و متتالية ثابتة إذن $S_n = (n+1) - v_0 . \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}\right]$ أي أن

$$S_n = (n+1) + \frac{8}{3} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

ح. حساب نهاية $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$ . : $\lim \frac{S_n}{n} = \lim \left[\frac{(n+1)}{n} + \frac{8}{3n} . \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right] = 1$

## التمرين الثاني : ( 04 نقاط )

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1، 2 و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 ، 1 ( الكرات لانفرق بينها باللمس ) نسحب عشوائيا في آن واحد كرتين من الكيس

1. أحسب احتمال الحوادث A ، B ، C حيث :

A" الكرتين المسحوبتين من نفس اللون " B " الكرتين تحملان رقمين جداؤهما معدوم "

C " كرتين بلونين مختلفين و رقمين جداؤهما معدوم "

$P(A) = \frac{C_6^2 + C_2^2}{C_8^2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$ و $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_4^1 + C_4^2}{C_8^2} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$ و

$$P(C) = \frac{C_6^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1}{C_8^2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب مجموع الرقمين المسحوبين

أ. قانون الاحتمال للمتغير العشوائي :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28}$ | $\frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}$ | $\frac{C_1^1 \times C_4^1 + C_3^2}{C_8^2} = \frac{7}{28}$ | $\frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_8^2} = \frac{3}{28}$ |

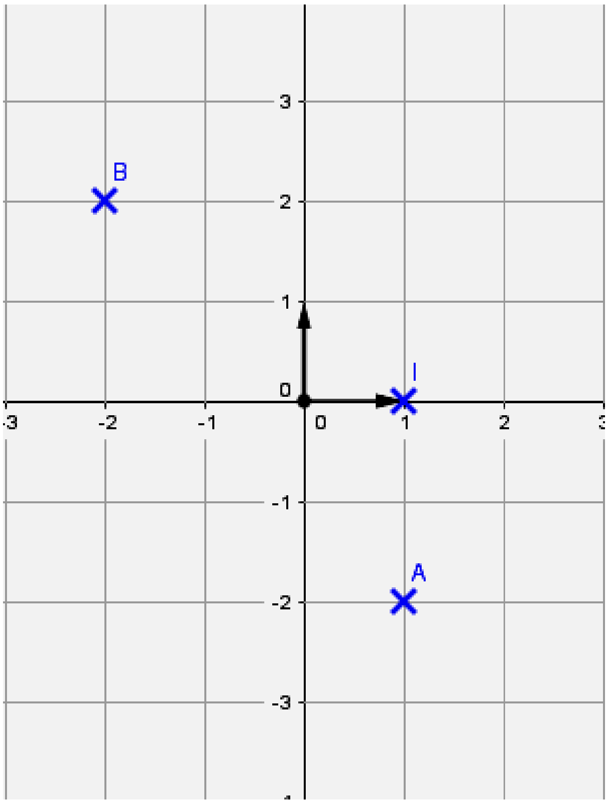
ب. حساب الأمل ألرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$E(X)=\frac{0\times6+1\times12+2\times7+3\times3}{28}=\frac{35}{28}=\frac{5}{4}$ إذن $E(X)=1,25$

## التمرين الثالث : ( 05 نقاط )

1. تعيين العددين المركبين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ 2\overline{\alpha}+\beta=6i\end{cases}$ يكافئ أن $2\overline{\alpha}-\alpha=1+6i$ بوضع $\alpha=x+iy$ نجد $x-3iy=1+6i$ و منه $\begin{cases}x=1\\ -3y=6\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ و منه $\alpha=1-2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتي الجملة نجد $1-2i+\beta=-1$ إذن $\beta=-2+2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ نعتبر النقط $I$ و $A$ و $B$ لواحقها على الترتيب $z_I=1$ و $z_A=1-2i$ و $z_B=-2+2i$




أ–أنشاء النقط $I$ و $A$ و $B$

ب–تعيين $z_w$ لاحقة النقطة $w$ مركز الدائرة $(C)$ ذات القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي أن

$$z_w=\frac{z_A+z_B}{2}=-\frac{1}{2}$$

3. $D$ نقطة لاحقتها $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$

كتابة $z_D$ على شكل الجبري :

$$z_D=\frac{3+9i}{4+2i}=\frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4}=\frac{30+30i}{20}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة $D$ تنتمي إلى الدائرة $(C)$: $|z_D-z_w|=\left|\frac{4}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{5}{2}$ و $|z_A-z_w|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}$ و منه محققة

4. $E$ نقطة من الدائرة $(C)$ لاحقتها $z_E$ حيث $z_E=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I+\left(1-e^{i\frac{\pi}{4}}\right).z_w$

أ- كتابة العدد $z_E+\frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

يعني أن $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن

$z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

ب- استنتاج أن $z_E=\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+\frac{3\sqrt{2}}{4}i$ : لدينا $z_E+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E+\frac{1}{2}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و

منه $z_E=\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}+i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

## التمرين الرابع : ( 07 نقاط ) :

I- نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln x$ .

1. حساب النهايات الدالة $h$ عند $0$ وعند $+\infty$ :

النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x^2-1+\ln(x)\right]=-\infty$ و

دراسة اتجاه تغير الدالة $h$ على $]0;+\infty[$ : $h'(x)=2x+\frac{1}{x}$ موجبة إذن الدالة $h$ متزايدة على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات:

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

2. حساب $h(1)$ : $h(1)=1^2-1+\ln(1)=0$

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$ على المجال $]0;+\infty[$ : بما أن الدالة $h$ متزايدة على $]0;+\infty[$ و تنعدم عند $1$ فإن $h(x)$ موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و سالبة على المجال $]0;1]$ .

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$

و ليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ بالتزايد المقارن

حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ : حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب له معادلة من الشكل $x=0$ .

2. بين انه من اجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ :

$f'(x)=1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right).x-\ln(x)}{x^2}$ و منه $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}$ إذن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ محققة

استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ : $f$ متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]0;1]$

جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

3. أ) إثبات أن $(\Delta)$ المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]=0$ و منه محققة.

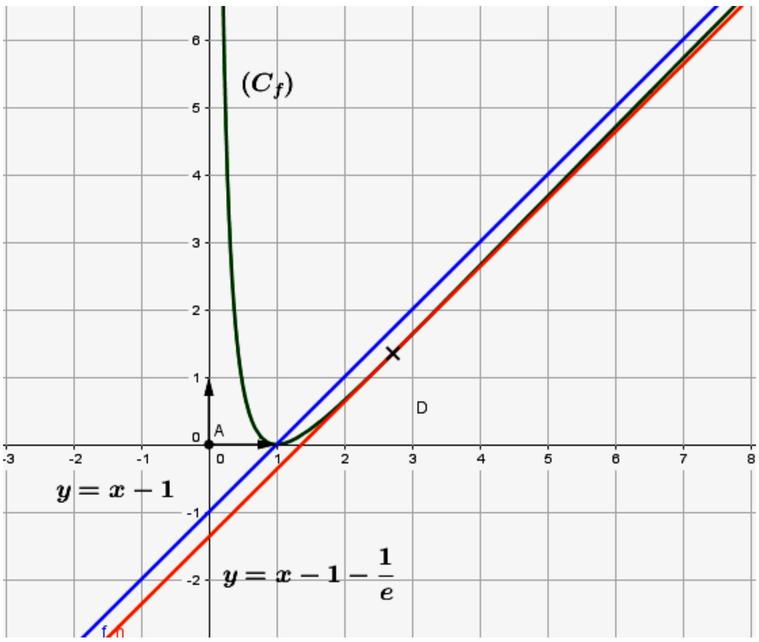
ب) دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$ ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\ln(x)}{x}\right]$

و هو موجب على المجال على المجال $]0;1[$ إي أن $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ على هذا المجال .

و سالب على المجال على المجال $]1;+\infty[$ إي أن $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$ على هذا المجال.

1. إثبات أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني $(C_f)$ في نقطة $A$ يطلب تعيين احداثيها : معامل توجيهه هو $f'(x)=1$ يعني أن تكافئ $\dfrac{g(x)}{x^2}=1$ يعني أن $g(x)=x^2$ يكافئ أن $\ln(x)=1$ يكافئ أن $x=e$ و منه ف $A(e;\,f(e))$ أي أن $A\left(e\,;\,e-1-\dfrac{1}{e}\right)$

4. ارسم $(\Delta)$ و $(d)$ و $(C_f)$ .




5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة $-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=m$ .

يعني أن $x-1-\dfrac{\ln(x)}{x}=x+m$ أي أن $f(x)=x+m$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m):y=x+m$

لما $m\in\left]-\infty;-1-\dfrac{1}{e}\right[$ نلاحظ أن $(C_f)$ و $(\Delta_m)$ لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=-1-\frac{1}{e}$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m\in\left]-1-\frac{1}{\mathrm{e}};-1\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m\in\left[-1;+\infty\right[$ نلاحظ أن $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta_m\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد

انتهى الموضوع الأول

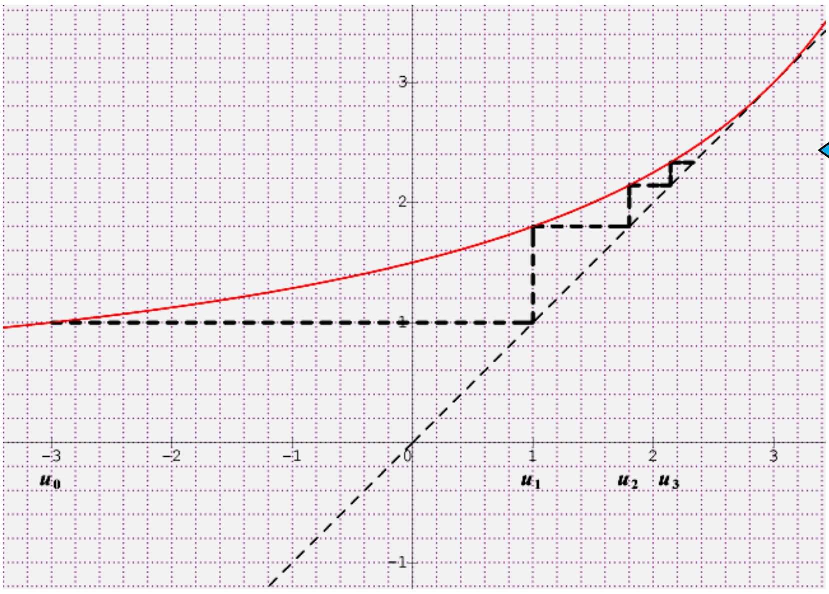
التصحيح المفصل للموضوع الثاني شعبة التقني رياضيات

## التمرين الأول : ( 04 نقاط)

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty\,;\,6[$ بـ: $f(x)=\dfrac{9}{6-x}$.

ولتكن $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

في الرسم المقابل ، $(c_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ و $(\Delta)$ المستقيم ذي المعادلة $y=x$




1. أ- باستعمال الرسم السابق تمثيل على حامل محور الفواصل في الشكل المقابل

ب - التخمين حول اتجاه تغير $(u_n)$ وتقاربها :

$(u_n)$ متتالية متزيدة و محدودة من الأعلى بالعدد 3 فاصلة نقطة تقاطع المستقيم $(\Delta)$ و $(C_f)$ فهي متقاربة

2. أ- البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n<3$ :

$u_0<3$ محققة

نفرض أن $u_n<3$ صحيحة و نبرهن صحة $u_{n+1}<3$

$u_n<3$ بالضرب في $(-1)$ نجد $-u_n>-3$ بإضافة 6 نجد $6-u_n>3$ بالقلب نجد $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{6-u_n}$ بالضرب في 9 نجد $\dfrac{9}{6-u_n}<3$ أي أن $u_{n+1}<3$ صحيحة

ومنه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n<3$ .

ب- استنتاج اتجاه تغير $(u_n)$ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9}{6-u_n}-u_n$ أي أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n}$ يعني أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$ بما أن $u_n<3$ فإن الفرق موجب إذن المتتالية $(u_n)$ متزايدة .

$(u_n)$ متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى هي متقاربة .

3. نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على ℕ كمايلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

أ –البرهان أن المتتالية $(v_n)$ حسابية : $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-3}=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}$ أي أن $v_{n+1}=\frac{6-u_n}{9-18+3u_n}$ و منه

$v_{n+1}=\frac{6-u_n}{3u_n-9}$ بحساب الفرق نجد $v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n}{3u_n-9}-\frac{1}{u_n-3}$ أي

$v_{n+1}-v_n=\frac{6-u_n-3}{3u_n-9}=-\frac{(3-u_n)}{3(3-u_n)}$ إذن $v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{3}$ و منه المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها

$-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-3}=-\frac{1}{6}$

ب –كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ : $v_n=v_0+n.r$ أي $v_n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n$

استنتاج عبارة $u_n$ : $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ يعني أن $u_n-3=\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ أي أن $u_n=3+\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n}$

و منه , $u_n=3+\frac{6}{-1-2n}$ إذن $u_n=\frac{3-6n}{-1-2n}$

حساب $\lim_{x\to+\infty}u_n$ : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-6n}{-2n}\right)=3$

هـ – حساب بدلالة $n$ المجموعين:

المجموع الأول : $s_n=v_0+v_1+...+v_n$ أي $S_n=\frac{(n+1)(v_0+v_n)}{2}$ أي $S_n=\frac{(n+1)\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)}{2}$ و منه

$S_n=\frac{(n+1)(-1-n)}{6}$ إذن $S_n=-\frac{(n+1)^2}{6}$

و المجموع الثاني : $s'_n=v_0\times u_0+v_1\times u_1+...+v_n\times u_n$. لدينا $u_n=3+\frac{1}{v_n}$ و منه $u_n\times v_n=3v_n+1$ و

منه $S'_n$ هو مجموع حدود متتابعة لمتتاليتين متتالية حسابية و متتالية ثابتة إذن $S'_n=3S_n+(n+1)$ أي أن

$S'_n=-3\frac{(n+1)^2}{6}+(n+1)$ إذن $S'_n=\left[-\frac{(n+1)}{2}+1\right](n+1)$ أي $S'_n=-\frac{1}{2}(1-n).(n+1)$

## التمرين الثاني : ( 05 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبرّرا الإجابة .

1) من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، 3 يقسم العدد $2^{2n}-1$ لدينا $2^2\equiv1[3]$ بالرفع الى قوى $n$ نجد $2^{2n}\equiv1[3]$ و منه

$2^{2n}-1\equiv0[3]$ و منه صحيحة.

2) إذا كان $x$ عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2-x\equiv0[6]$ فإن $x\equiv0[6]$ :

| $x\equiv$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $[6]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x\equiv$ | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | $[6]$ |

و منه خاطئة

3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$ .

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و منه خاطئة .

4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في $Z^2$ ، هي مجموعة الثنائيات $(x , y)$ من الشكل $(4+10k ; 9+24k)$ مع $k \in Z$ : $12(4+10k) - 5(9+24) = 12\times4 + 120k - 5\times9 - 120k$ و منه $12(4+10k) - 5(9+24) = 3$ إذن محققة و منه صحيحة

5) $M$ و $N$ عددان طبيعيان كتابتهما في النظام العشري هي : $\overline{abc}$ و $\overline{bca}$ على الترتيب .

إذا كان $M$ يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27.

إذا كان $M$ يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن $M - N \equiv -N [27]$ أي أن $M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$ أي $M - N \equiv -a - 100b - 10c [27]$ و $-999 \equiv 0 [27]$ أي أن و منه $M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27]$ أي $M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27]$ أي أن $M - N \equiv -10M [27]$ و $M \equiv 0 [27]$ إذن $M - N \equiv 0 [27]$ صحيحة

## التمرين الثالث : ( 04 نقاط)

صندوق يحتوي على $n$ كرية بيضاء حيث $n \geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء . نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق .

1. احتمال سحب كرتين بيضاوين : $P(A) = \dfrac{C_n^2}{C_{n+7}^2} = \dfrac{\dfrac{n!}{2(n-2)!}}{\dfrac{(n+7)!}{2(n+5)!}} = \dfrac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}$ .

2. نسمي $P(n)$ احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

أ –بين أن $P(n) = \dfrac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$ :. $P(n) = \dfrac{C_n^2 + C_4^2 + C_3^2}{C_{n+7}^2} = \dfrac{\dfrac{n(n-1)}{2} + 6 + 3}{\dfrac{(n+7)(n+6)}{2}}$ أي ان

$$P(n) = \frac{n^2 - n + 18}{(n+7)(n+6)}$$

ب حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n)$ : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^2}\right) = 1$

تفسير النتيجة المحصل عليها : كلما كان عدد الكرات البيضاء أكبر فإن احتمال سحب كرتين من نفس اللون يقترب احتمالها من 1 .

3. فيما يلي نأخذ $n=5$ و نعتبر اللعبة التالية : يدفع اللاعب $30DA$ ويسحب في آن واحد كرتان من الصندوق . عند سحب كرة بيضاء يتحصل على $40DA$ وعند سحب كرة حمراء يتحصل على $10DA$ و عند سحب كرة خضراء يخسر ما دفعه . X المتغير العشوائي الذي يمثل الربح الجبري للاعب .

أ. قيم المتغير العشوائي X هي $-60$ ، $-20$, $-10$ ,$10$ , $20$ ، $50$

$n$ كرية بيضاء حيث $n\geq 2$ و أربع كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء

ب. تعيين قانون الاحتمال العشوائي للمتغير العشوائي X :

| $x_i$ | $-60$ | $-20$ | $-10$ | $10$ | $20$ | $50$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | $\frac{3}{66}$ | $\frac{12}{66}$ | $\frac{6}{66}$ | $\frac{15}{66}$ | $\frac{20}{66}$ | $\frac{10}{66}$ |

حساب أمله الرياضياتي: $\mathrm{E(X)}=\dfrac{-60\times3-20\times12-10\times6+10\times15+20\times20+50\times10}{66}=\dfrac{570}{66}=\dfrac{95}{11}$

## التمرين الرابع : ( 07 نقاط)

I – نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-x+1+e^{-x}$ .

1. حساب نهايات الدالة $g$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ بالتزايد المقارن

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$: $g'(x)=-1-e^{-x}$ سالبة تماماً

و منه الدالة $g$ متناقصة على المجال $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

3. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ حيث $1.27<\alpha<1.28$ : $g(1{,}27)=0{,}010$ و $g(1{,}28)=-0{,}0001$ بما أن الدالة $g$ مستمرة و متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$ حسب مبرهن القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha$ حيث $1.27<\alpha<1.28$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g(x)$ | | + | 0 | − | |

II – نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(e^{x}-1)(2-\mathrm{x})$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ .

1. حساب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} -x.e^{x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[-(2-x)]=-\infty$

.2 أ-إثبات أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}.(2-x)-2]=-2$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}.(2-x)]=0$ التزايد المقارن .

استنتج أن المنحني $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته : بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-2$ فإن $y=x-2$ معادلة نصف مستقيم المقارب المائل جهة $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي بالنسبة لـ $(C_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ معادلته $y=x-2$ :

إشارة الفرق $[f(x)-x+2]=e^{x}(2-x)$ من إشارة $(2-x)$

و المستقيم $(\Delta)$ و $(C_f)$ المنحنى يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| إشارة $f(x)-y$ | + | 0 | — |
| الوضعية : | $(C_f)$ يقع فوق المستقيم $(\Delta)$ | $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان | $(C_f)$ يقع تحت المستقيم $(\Delta)$ |

.3 إثبات إن $f'(x)=e^{x}.g(x)$ : $f(x)=(e^{x}-1)(2-x)$ يعني أن $f'(x)=e^{x}(2-x)-(e^{x}-1)$ أي أن $f'(x)=e^{x}[(2-x)-(1-e^{-x})]$ و منه $f'(x)=e^{x}[-x+1+e^{-x}]$ إذن $f'(x)=e^{x}g(x)$

استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ : $f'(x)=e^{x}g(x)$ إشارتها من إشارة $g(x)$ و منه $f$ متزايدة على $]-\infty;\alpha]$ و متزايدة على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ $-\infty$ |

.4 إثبات أن $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ : $g(\alpha)=0$ يعني $-\alpha+1+e^{-\alpha}=0$ يعني أن $e^{-\alpha}=\alpha-1$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ و $f(\alpha)=(e^{\alpha}-1).(2-\alpha)$ بالتعويض نجد $f(\alpha)=\left(\dfrac{1}{\alpha-1}-1\right).(2-\alpha)$ و منه $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha).(2-\alpha)}{\alpha-1}$ إذن $f(\alpha)=\dfrac{(2-\alpha)^2}{\alpha-1}$ .

استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ : $1{,}27<\alpha<1{,}28$ و منه $0{,}27<\alpha-1<0{,}28$ بالقلب نجد

$$\frac{1}{0{,}28}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0{,}27}\text{..........}(1)$$

و $1,28> \alpha > 1,27$ بإضافة $-2$ يعني $-0,72> \alpha - 2 > -0,73$ بالتربيع نجد

$0,72^2 < (\alpha-2)^2 < 0,73^2$..............(2)

بضرب $(1)$ و $(2)$ نجد $\frac{0,72^2}{0,28} < \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1} < \frac{0,73^2}{0,27}$ أي أن $1,85 < f(\alpha) \leq 1,97$

5. رسم $(\Delta)$ و $(C_f)$ :