الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قالمة — العام الدراسي 2024/2023

ثانوية حدادي محمد (هيليوبوليس) — المستوى: 3 تقني رياضياتي

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات — المدة: 4 ساعات

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات مرقمة بـ :1 ؛1 ؛1 ؛0 ,(-1) و 5 كرات سوداء مرقمة بـ : 0 ؛ 0 ؛1 ؛ 1 و (-1).

الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس.

I) نعتبر الحوادث الآتية :

A : " الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B : " الحصول على اللونين الأبيض والأسود "

C : " مجموع ارقام الكرات الثلاثة يساوي الصفر "

1) أحسب احتمال الحادثة A

2) بين كل مما يلي : $P(B)=\frac{5}{6}$ ؛ $P(C)=\frac{31}{120}$ ؛ $P(A\cap C)=\frac{7}{120}$

3) علما أنّ مجموع الكرات الثلاثة يساوي صفر ؛ ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاثة من نفس اللون.

II) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة.

1 -) عين قيم المتغير العشوائي X .

2 -) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثمّ احسب امله الرياضياتي .

التمرين الثاني (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\int_n^{n+1} e^{2-x}dx$

1) – أ) تحقق أنّ $u_0=e^2-e$ ثمّ اثبت انّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$

-ب) أكتب u_n بدلالة n.

2) - أ) أحسب بدلالة n الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

- ب) استنتج أنّ (u_n) متتالية متقاربة .

3) برهن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{e}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4) – أ) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=e^{1445}u_{1445}+e^{1446}u_{1446}+...+e^{2024}u_{2024}$

- ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n ثم استنتج المجموع T_n حيث :

$P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$ و $T_n=\ln u_0+\ln u_1+...+\ln u_n$.

إعداد الأستاذ: غ_ شيخ

التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) الآتية : $(E)\ldots \quad 4x-9y=5$.

1 -) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E).

2 -) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام تعداد اساسه x ويكتب $\overline{98}$ في نظام تعداد أساسه y حيث :
$x\leq 35$ و $y\leq 18$.

عين القيم الممكنة لـ x و y ثم القيم الممكنة للعدد α في النظام العشري .

3) – أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9.

- ب) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلولا المعادلة (E') الآتية : $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$.

4) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n العددين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و $p\gcd(a;b)=d$.

- أ) ما هي القيم الممكنة لـ d ؟

- ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $d=5$.

5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$.

- أ) بين أنّ العدد $(n+1)$ قاسم مشترك لكل من العددين A و B .

- ب) استنتج حسب قيم n ؛ القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الرابع (7 نقاط).

I) نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_n(x)=n(x+2)+e^{x+1}$ حيث n . عدد طبيعي غير معدوم

1) ادرس تغيرات الدالة g_n ثم شكل جدلا تغيراتها.

2) بين أنّ المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n وأنّ $-3<\alpha_n<-2$.

3) استنتج إشارة $g_n(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) $f_n(x)$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ : $f_n(x)=\dfrac{x+1}{1+ne^{-x-1}}$ وليكن (C_{f_n}) منحنيها

البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ ثم ؛ بيانيا فسر النتيجة.

2) – أ) اثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x: $f_n'(x)=\dfrac{e^{-x-1}\left[g_n(x)\right]}{\left(1+ne^{-x-1}\right)}$.

3.) بين أن $f_n(\alpha)=\alpha_n+2$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f_n .

4) – أ) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_{f_n}) في جوار $+\infty$.

- ب) ادرس وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) – أ) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{(-x-1)e^{-x-1}}{\left[1+(1+n)e^{-x-1}\right]\left(1+ne^{-x-1}\right)}$$

- ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

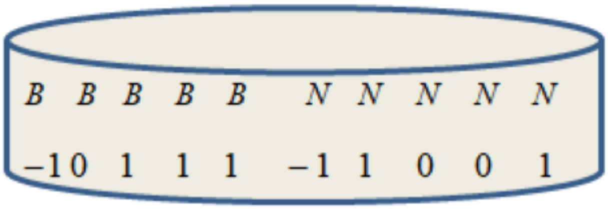
6) أنشئ (Δ) ؛ (C_1) و (C_2) في المعلم السابق .

انتهى الموضوع

إعداد الأستاذ : ع_ شيخ

الحلّ المفصّل

التمرين الأول :



◄لاحظ انه يمكننا أن نميز بين الكريات :

*إما باللون : 5 بيضاء (B) و 5 سوداء (N).

** إما بالأرقام :

- 3 كريات تحمل الرقم 0
- كرتان تحملان العدد (-1)
- 5 كريات تحمل الرقم 1

◄كل سحب عبارة عن توفيقة ذات 3 عناصر من مجموعة 10 عناصر.

العدد الكلي لهذه السحبات هو $C_{10}^3=120$.

1) حساب احتمال الحادثة A.

الحادثة A تقع إذا تم سحب 3 كرات بيضاء من بين 5 أو 3 كرات سوداء من بين 5 ايضا.

عدد عناصر A هو إذا : $C_5^3+C_5^3=20$.

وعليه : $P(A)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$.

2) نبين كل مما يلي : $P(B)=\frac{5}{6}$ ؛ $P(C)=\frac{31}{120}$ ؛ $P(A\cap C)=\frac{7}{120}$.

◄عناصر B من الشكل : $\{B,N,N\}$ أو $\{B,B,N\}$.

يعني تتحقق الحادثة B إذا سحبنا كرة بيضاء وكرتين سوداوين أو سحبنا كرتين بيضاوين وكرة سوداء.

عدد عناصر B اي عدد الحالات الملائمة هو :

$$C_5^1\times C_5^2+C_5^2\times C_5^1=100$$

وعليه: $P(B)=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$

◄عناصر C من الشكل : $\{0,0,0\}$ أو $\{-1,1,0\}$

يجب في هذه الحالة سحب 3 كرات تحمل الرقم0 او كرة تحمل الرقم1 وكرة تحمل العدد(-1) وكرة تحمل الرقم 0.

عدد عناصر C هو :

$$C_3^3+(C_2^1\times C_5^1\times C_3^1)=1+30=31.$$

إذا : $P(C)=\frac{31}{120}$

◄الحادثة $A\cap C$ هي :

"الحصول على3 كرات من نفس اللون ومجموع أرقامها يساوي 0 "

يجب إذا:

*سحب3 كرات بيضاء وتحمل الأرقام: (-1)؛1؛ 0

بـ : $C_1^1\times C_1^1\times C_3^1=3$ طريقة

أو

سحب 3 كرات سوداء تحمل الأرقام :(-1)؛1؛ 0

بـ $C_1^1\times C_2^1\times C_2^1=4$ طريقة

عدد عناصر $A\cap C$ هو إذا : $3+4=7$.

ومنه : $P(A\cap C)=\frac{7}{120}$

3) علما أنّ مجموع الكرات الثلاثة يساوي صفر ؛ نعيّن احتمال أن تكون الكرات الثلاثة من نفس اللون.

نريد حساب احتمال الحادثة C علما أن الحادثة A قد وقعت أي $P_A(C)$.

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}$$

لدينا: $=\frac{7}{120}\times\frac{120}{31}$

$=\frac{7}{31}$

II) 1 -) نعين قيم المتغير العشوائي X.

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي قيم المجموعة $\{-2,-1,0,1,2\}$.

◄ $P(X=-2)$ وهو احتما وقوع الحادثة :

"الحصول على 3 كرات مجموع أرقامها -2 "

أي هو الحادثة $\{-1,-1,0\}$

$$P(X=-2)=\frac{C_2^2\times C_3^1}{120}=\frac{3}{120}$$

◄ $P(X=-1)$: $\{-1,0,0\}$ أو $\{-1,-1,1\}$

$$P(X=-1)=\frac{\left(C_2^1\times C_3^2\right)+\left(C_2^1\times C_5^1\right)}{120}$$
$$=\frac{11}{120}$$

◄ $P(X=0)$: $\{0,0,0\}$ أو $\{-1,1,0\}$

$$P(X=0)=\frac{C_3^3+\left(C_2^1\times C_5^1\times C_3^1\right)}{120}$$
$$=\frac{31}{120}$$

◄ $P(X=1)$: $\{1,0,0\}$ أو $\{1,1,-1\}$

$$P(X=1)=\frac{\left(C_5^1\times C_3^2\right)+\left(C_5^2\times C_2^1\right)}{120}$$
$$=\frac{35}{120}$$

◄ $P(X=2)$: $\{1,1,0\}$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2\times C_3^1}{120}=\frac{30}{120}$$

◄ $P(X=3)$: $\{1,1,1\}$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{120}=\frac{10}{120}$$

قانون المتغير العشوائي X ملخص في الجدول :

القيم x_i	-2	-1	0	1	2	3	$\sum$
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{120}$	$\frac{11}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{10}{120}$	1

وفي هذه الحالة :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_iP(X=xi)$$
$$=-\frac{6}{120}-\frac{11}{120}+0+\frac{35}{120}+\frac{60}{120}+\frac{30}{120}$$
$$E(X)=9$$

التمرين الثاني :

$$u_n=\int_n^{n+1}e^{2-x}dx$$

1) – أ) * تتحقق أنّ $u_0=e^2-e$ ثمّ نثبت انّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

الدالة $x\mapsto e^{2-x}$ تقبل كإحدى دوالها الأصلية الدالة $x\mapsto\left(-e^{2-x}\right)$

ومنه :

$u_0=\int_0^1 e^{2-x}dx$
$=\left[-e^{2-x}\right]_0^1$
أي
$u_0=\left(-e^1\right)-\left(-e^2\right)$
$=e^2-e$

** اثبت انّه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

الدالة $x\mapsto e^{2-x}$ دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ وبالتالي موجبة تماما على المجال $[n;n+1]$.

وعليه : $\int_n^{n+1}e^{2-x}dx>0$ أي

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

ب-) نكتب u_n بدلالة n.

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\int_n^{n+1}e^{2-x}dx$

$$=\left[-e^{2-x}\right]_n^{n+1}$$
$$=\left(-e^{2-n-1}\right)-\left(-e^{2-n}\right)$$

إذا من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=e^{2-n}-e^{1-n}$

أي من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=e^{1-n}(e-1)$

2) أ -) حساب بدلالة n الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

بالرجوع إلى عبارة الحد العام للمتتالية نجد :

$$u_{n+1}-u_n=e^{1-n-1}(e-1)-e^{1-n}(e-1)$$
$$=(e-1)\left(e^{-n}-e^{1-n}\right)$$
$$=(e-1)e^{-n}(1-e)$$

أي $u_{n+1}-u_n=-(e-1)^2e^{-n}$ وعليه :

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n<0$

المتتالية (u_n) متناقصة تماما في $\mathbb{N}$.

- ب) استنتاج أنّ (u_n) متتالية متقاربة .

المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل ومتناقصة تماما فهي إذا متقاربه.

3) نبرهن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{e}$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

◄ نبرهن ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{1}{e}u_n$

لدينا :

$$u_{n+1}=e^{1-n}-e^{-n}$$
$$=\frac{1}{e}\times e\left(e^{1-n}-e^{-n}\right)$$

اي $u_{n+1} = \frac{1}{e}\left(e^{2-n} - e^{1-n}\right)$
$= \frac{1}{e} u_n$

إذا : (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{e}$

◄ المتتالية (u_n) هندسية أساسها $-1<\frac{1}{e}<1$

فهي إذا متقاربة نحو0

اي $\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$

4) – أ) حساب المجموع S_n حيث :

$S_n = e^{1445}u_{1445}+e^{1446}u_{1446}+...+e^{2024}u_{2024}$

لاحظ ما يلي :

$$\underbrace{\underbrace{e^1u_1+e^2u_2+...+e^{1444}u_{1444}}_{1444\ \text{حد}} + e^{1445}u_{1445}+...e^{2004}u_{2004}}_{2004\ \text{حدا}}$$

S_n هو إذا مجموع $(2004-1444=560)$ حدا.

ثم : $e^n u_n = e^n\left(e^{2-n}-e^{1-n}\right)$
$= e^2 - e$

في هذه الحالة :

$S_n = (e^2-e)+(e^2-e)+...+(e^2-e)$

S_n هو مجموع 560 حدا مساويا لـ(e^2-e).وعليه :

$.S_n = 560(e^2-e)$

- ب) نحسب بدلالة n الجداء P_n ثم استنتج المجموع T_n حيث : $P_n = u_0\times u_1\times...\times u_n$

و $.T_n = \ln u_0 + \ln u_1+...+\ln u_n$

◄ P_n هو جداء $(n+1)$ حدا من المتتالية الهندسية $.(u_n)$

بما أن $u_n = u_0\times q^n$: ينتج

$P_n = u_0(u_0q)(u_0q^2)\times...\times(u_0q^n)$

$= \underbrace{(u_0\times u_0\times...\times u_0)}_{(n+1)\ \text{عاملا}}\times\left(q^{1+2+3+...+n}\right)$

لدينا :

من جهة : $u_0\times u_0\times...\times u_0 = u_0^{n+1}$

من جهة اخرى :

$(1+2+3+...+n)$ هو مجموع n حدا متعاقبة من متتالية الاعداد الطبيعية . ومنه :

$.1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

في هذه الحالة :

وبالتعويض يكون $P_n = u_0^{n+1}\times q^{\frac{n(n+1)}{2}}$:

$$P_n = (e^2-e)^{n+1}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left[(e^2-e)\left(\frac1e\right)^{\frac n2}\right]^{n+1}$$

◄ $T_n = \ln u_0+\ln u_1+...+\ln u_n$
$= \ln(u_0\times u_1\times...\times u_n)$

اي $T_n = \ln(P_n)$ أي $T_n = (n+1)\ln\left[(e^2-e)\left(\frac1e\right)^{\frac n2}\right]$

التمرين الثالث :

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) الآتية :

$.4x-9y=5 \quad ...(E)$

1 -) نبين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 8[9]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

◄ $(x;y)$ حل للمعادلة (E) معناه $4x=9y+5$

معناه $4x\equiv5[9]$

7 اولي مع 9 يكون $7\times4x\equiv7\times5[9]$

اي $28x\equiv35[9]$

وبما أنّ $28\equiv1[9]$ و $35\equiv8[9]$ نجد $x\equiv8[9]$

◄لدينا (E) تكافئ $9y=4x-5$ ... (1)

بما أنّ $x\equiv8[9]$ معناه $x=9k+8$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

بتعويض x بقيمته في (1) نجد :

$9y=4(9k+8)-5$ أي $9y=9(4k+3)$

وبالتالي $y=4k+3$

إذا كانت S هي مجموعة حلول (E) فإنّ :

$S=\{(9k+8;4k+3):k\in\mathbb{Z}\}$

2 -) نعين القيم الممكنة لـ x و y ثم القيم الممكنة للعدد α في النظام العشري .

لدينا ما يلي :

$\alpha = \overline{43}_{[x]} = 3+4x$ مع $0\le x\le35$ ... (1)

$\alpha=\overline{98}_{[y]}=8+9y$ مع $0\le y\le18$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج : $4x-9y=5$

وعليه الثنائية $(x;y)$ هي حل للمعادلة (E) مع الشروط المذكورة أعلاه.

يكون $\begin{cases}0\le 9k+8\le 35\\0\le 4k+3\le 25\end{cases}$ اي $\begin{cases}-8\le 9k\le 27\\-3\le 4k\le 15\end{cases}$ ؛ $k\in\mathbb{N}$

وبالتالي : $\begin{cases}\frac{-8}{9}\le k\le 3\\ \frac{-3}{4}\le k\le\frac{15}{4}\end{cases}$ وبما أن k عدد طبيعي

نجد : $k\in\{0,1,2,3\}$.

في هذه الحالة القيم الممكنة للعددين x و y وبعد تعويض k يكون :

$(x;y)\in\{(8;3),(17;7),(26;11),(35;15)\}$.

اما قيم α نحصل عليها بتعويض x أو y بقيمته.

$\alpha\in\{15,71,107,143\}$

3) أ –) ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9.

لدينا: $4^0\equiv1[9]$ ؛ $4\equiv4[9]$ ؛ $4^2\equiv7[9]$ ؛ $4^3\equiv1[9]$

من أجل كل عدد طبيعي k: $4^{3k}\equiv1[9]$.

وهذا معناه :

بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9 تشكل متتالية دورية ودورها هو 9

هذه البواقي ملخصة في الجدول الموالي :

قيم n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
البواقي الممكنة	1	4	7

- ب) نعين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلولا المعادلة (E') الآتية : $2011^x+4^y+7\equiv0[9]$.

لدينا $2011\equiv4[9]$

في هذه الحالة :

(E') تكافئ $4^x+4^y+7\equiv0[9]$ $4^x+4^y\equiv-7[9]$

وبما أنّ $-7\equiv2[9]$ يكون $4^x+4^y\equiv2[9]$ ... (1)

بما أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

(1) تكافئ $4^{9k+8}+4^{4k+3}\equiv2[9]$ و $k\in\mathbb{N}$

أي $4^2\times4^{3(3k+2)}+4^k\times4^{3(k+1)}\equiv2[9]$

أي $4^2+4^k\equiv2[9]$

$4^2\equiv7[9]$ إذا $4^K+7\equiv2[9]$ ومنه $4^K\equiv-5[9]$

أي $4^K\equiv4[9]$

وحسب الجدول $K=3m+1/m\in\mathbb{N}$. وفي هذه الحالة $(x;y)=(27m+17;12p+7)$.

4) أ -) تعيين القيم الممكنة لـ d

لدينا $\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ اي $\begin{cases}d|9n+8\\d|4n+3\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d|4(9n+8)\\d|9(4n+3)\end{cases}$

يكون $d|[4(4n+8)-9(4n+3)]$

ومنه $d|5$

$d|5$ معناه $d\in\{1,5\}$

- ب) نعين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $d=5$.

إذا كان $p.g.c.d(a;b)=5$ فهذا يعني "

$\begin{cases}a\equiv0[5]\\b\equiv0[5]\end{cases}$ أي $\begin{cases}9n+8\equiv0[5]\\4n+3\equiv0[5]\end{cases}$ ومنه

$4n+3\equiv0[5]$

ينتج $4n\equiv2[5]$

اي $16n\equiv8[5]$ ... (2) لكن

$\begin{cases}16\equiv1[5]\\8\equiv3[5]\end{cases}$ ومن (2) نجد $n\equiv3[5]$

قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $d=5$.

هي $n=5p+3$ مع $p\in\mathbb{N}$

5- أ) نبين أنّ العدد $(n+1)$ قاسم مشترك لكل من العددين A و B.

لدينا $A=(n+1)(9n+8)$ أي $(n+1)|A$

$B=(n+1)(4n+3)$ أي $(n+1)|B$

مما سبق : $(n+1)$ قاسم مشترك للعددين A و B

- ب) استنتاج حسب قيم n؛ القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

لدينا :

$p.g.c.d(A;B)=p.g.c.d[(n+1)(9n+8);(n+1)(4n+3)]$

$=(n+3)p.g.c.d(4n+3;9n+8)$

وحسب ما سبق :

$p.g.c.d(9n+8;4n+3)=d$ حيث $d=1$ أو $d=5$

وجدنا : من أجل $n=5p+3;p\in\mathbb{N}$ يكون $d=5$

وعليه :

◄ من أجل $n=5p+3$ يكون

$p.g.c.d(A;B)=5(n+1)$

◄ من أجل $n\neq5p+3$

يكون $p.g.c.d(a;b)=n+1$

التمرين الرابع

I) 1-) دراسة تغيرات الدالة g_n ثم تشكيل جدول تغيراتها.

◄حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g_n(x)=-\infty \;;\; \begin{cases} n(x+2)\to-\infty \\ e^{x+1}\to 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=+\infty \;;\; \begin{cases} n(x+2)\to+\infty \\ e^{x+1}\to +\infty\end{cases}$$

◄الدالة المشتقة وإشارتها

g_n دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$g_n'(x)=n+e^{x+1}$$

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ومن اجل كل x من $\mathbb{R}$

$$g_n'(x)>0$$

الدالة g_n هي إذا دالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

◄ جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	
$g_n(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

2) نبين أنّ المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n وأنّ $-3<\alpha_n<-2$.

◄الدالة g_n مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$. وبالتالي :

المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيد ا α_n في $\mathbb{R}$

◄ لدينا :

$g_n(-3)=-n+e^{-2}$ ؛ $g_n(\alpha_n)=0$ و $g_n(-2)=e^{-1}$

نلاحظ أن: $g_n(-3)<g_n(\alpha_n)<g_n(-2)$

وبما أن g_n متزايدة تماما فهي تحفظ الترتيب فإنّ :

$$-3<\alpha_n<-2$$

3) استنتاج إشارة $g_n(x)$ على $\mathbb{R}$.

إشارة $g_n(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$	α_n	$+\infty$
$g_n'(x)$	$-$	0	$+$

II) 1) حساب $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ ثم ؛ بيانيا فسر النتيجة.

◄ $*\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=?\begin{cases}(x+1)\to-\infty \\ \left(1+ne^{-x-1}\right)\to+\infty\end{cases}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

نزيل هذه الحالة .

$$f_n(x)=\frac{x+1}{e^{-x}\left(e^x+e^{-1}\right)}=\frac{xe^x+e^x}{e^x+e^{-1}}$$

بالانتقال إلى النهاية نجد :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x+e^x}{e^x+e^{-1}}$$

$$=0 \;;\left(xe^x\to0; e^x\to0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty \;;\; \left((x+1)\to+\infty; e^{-x-1}\to0\right)$$

◄*بيانيا المستقيم الذي معادلته $y=0$ أي حامل محور الفواصل هو مستقيم مقارب لـ $\left(C_{f_n}\right)$.

*أما في جوار $(+\infty)$ ؛يحتمل وجود مستقيم مقارب مائل .

2) أ –) إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f_n'(x)=\frac{e^{-x-1}\left[g_n(x)\right]}{\left(1+ne^{-x-1}\right)^2}.$$

لدينا :

$$f_n'(x)=\frac{\left(1+ne^{-x-1}\right)-\left(-ne^{-x-1}\right)(x+1)}{(1+ne^{-x-1})^2}$$

$$=\frac{1+2ne^{-x-1}+nxe^{-x-1}}{\left(1+ne^{-x-1}\right)^2}$$

$$=\frac{1+ne^{-x-1}(x+2)}{\left(1+ne^{-x-1}\right)^2}$$

$$=\frac{e^{-x-1}\left(e^{x+1}+n(x+2)\right)}{\left(1+ne^{-x-1}\right)}$$

اي $f_n'(x)=\dfrac{e^{-x-1}\left[g_n(x)\right]}{\left(1+ne^{-x-1}\right)^2}$.

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f_n

نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ؛ إشارة f_n من إشارة g_n . وهذا يعني

◄ f_n متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\alpha_n\right]$

f_n ◄ متزايدة تماما على المجال $\left[\alpha_n;+\infty\right[$

◄جدول تغيرات الدالة f_n يكون كما يلي :

x	$-\infty$ α_n $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$ 0 $+$
$f_n(x)$	$0 \searrow f_n(\alpha_n) \nearrow +\infty$

3)نبين أن $f_n(\alpha)=\alpha_n+2$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_n.

لدينا :

$$f_n(\alpha_n)-(\alpha_n+2)=\frac{\alpha_n+1}{1+ne^{-\alpha_n-1}}-(\alpha_n+2)$$

$$=\frac{\alpha_n+1-(\alpha_n+2)(1+ne^{-\alpha_n-})}{1+ne^{-\alpha_n-1}}$$

$$f_n(\alpha_n)=\frac{\alpha_n+1-\alpha_n-n\alpha_n e^{-\alpha_n-1}-2-2ne^{-\alpha_n-1}}{1+ne^{-\alpha_n-1}}$$

$$=\frac{-1-ne^{-\alpha_n-1}(\alpha_n+2)}{1+ne^{-\alpha_n-1}}$$

$$=\frac{-e^{\alpha_n+1}\left[e^{-\alpha_n-1}+n(\alpha_n+2)\right]}{1+ne^{-\alpha_n-1}}$$

اي $f_n(\alpha_n)-(\alpha_n+2)=\dfrac{-e^{\alpha_n+1}.g_n(\alpha_n)}{1+ne^{-\alpha_n-1}}$

وبما أن $g_n(\alpha_n)=0$ ينتج $f_n(\alpha_n)=\alpha_n+2$

4) أ –) نبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_{f_n}) في جوار $+\infty$.

لدينا :

$$f_n(x)-(x+1)=\frac{-ne^{-x-1}(x+1)}{1+ne^{-x-1}}$$

$$=-n\frac{\frac{x+1}{e^{x+1}}}{1+ne^{-x-1}}$$

وبالانتقال إلى النهاية يكون :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f_n(x)-(x+1)\right]=0\ ;\begin{cases}\dfrac{x+1}{e^{x+1}}\to 0\\ (1+ne^{-x-1})\to 1\end{cases}$$

وبالتالي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_{f_n}) في جوار $+\infty$.

- ب) ندرس وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم (Δ) .

إشارة الفرق $[f_n(x)-(x+1)]$ من إشارة $-n(x+1)$ هذه الاشارة كما يلي (لكون $n>0$)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

وبالتالي :

◄ (C_{f_n}) أعلى (Δ) في المجال $]-\infty;-1[$

◄ (C_{f_n}) أسفل (Δ) في الجال $]-1;+\infty[$

◄ (C_{f_n}) يقطع (Δ) في النقطة $(-1;0)$

5) أ –) نثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{(-x-1)e^{-x-1}}{\left[1+(1+n)e^{-x-1}\right](1+ne^{-x-1})}$$

لدينا :

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=$$

$$=\frac{(x+1)\left[(1+ne^{-x-1})-(1+(n+1)e^{-x-1})\right]}{\left[1+(n+1)e^{-x-1}\right](1+ne^{-x-1})}$$

$$=\frac{(x+1)(1+ne^{-x-1}-1-ne^{-x-1}e^{-x-1})}{\left[1+(n+1)e^{-x-1}\right](1+ne^{-x-1})}$$

$$=\frac{-(x+1)e^{-x-1}}{\left[1+(n+1)e^{-x-1}\right](1+ne^{-x-1})}$$

- ب) درس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

واضح أن شارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
		$+$	0	$-$	

◄ $(C_{f_{n+1}})$ و (C_{f_n}) يشتركان في النقطة $A(-1;0)$.

◄ $(C_{f_{n+1}})$ أعلى (C_{f_n}) في المجال $]-\infty;-1[$

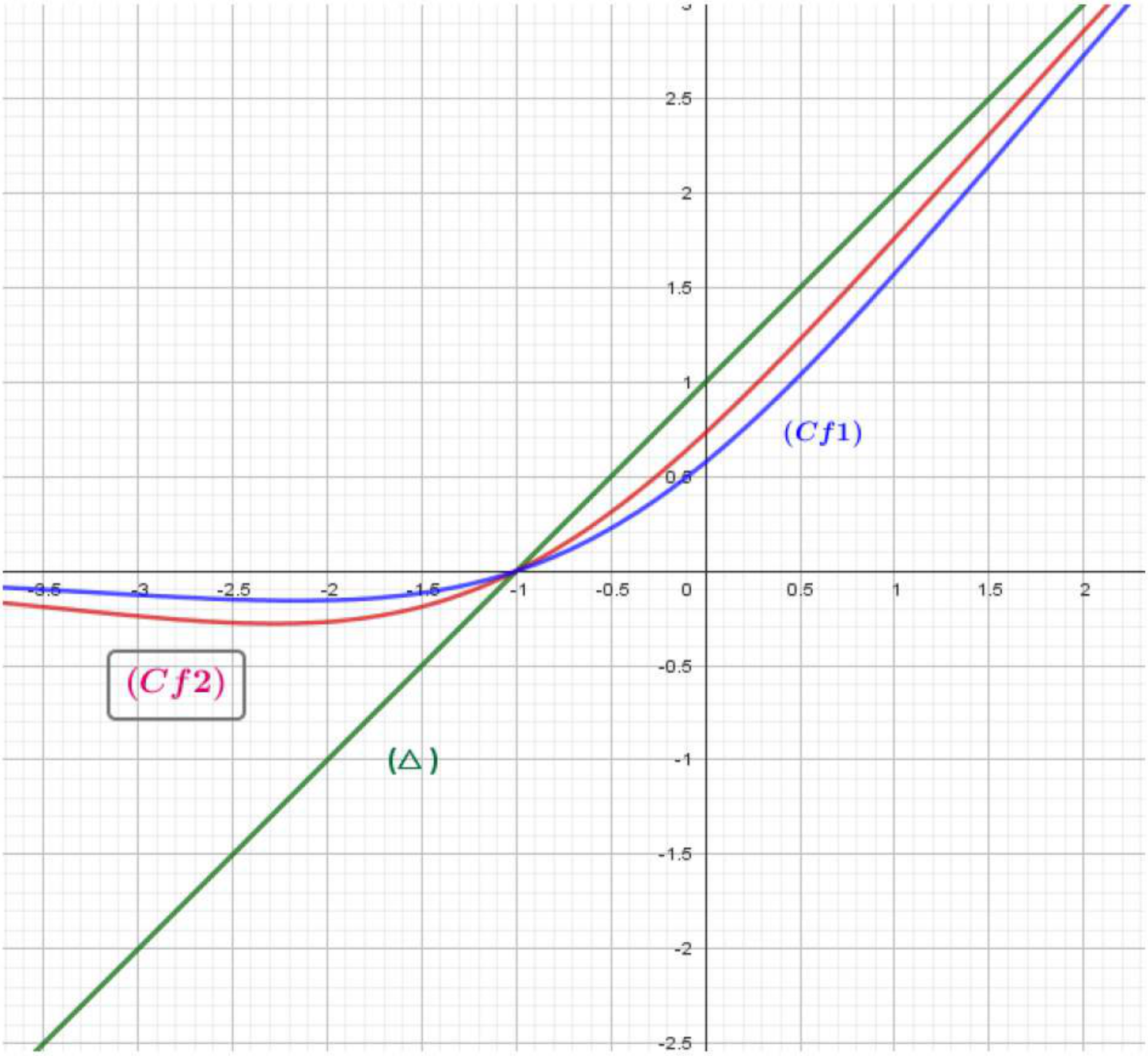
◄ $(C_{f_{n+1}})$ أسفل (C_{f_n}) في المجال $]-1;+\infty[$

6) ننشئ (Δ) ؛ (C_1) و (C_2) في المعلم السابق .

◄ (Δ) يمر بالنقطتين ذات الحداثيين $(0;1)$ و $(-1;0)$

◄معادله (C_{f_1}) هي : $y=\dfrac{x+1}{1+e^{-x-1}}$

◄ معادله (C_{f_2}) هي $y=\dfrac{x+1}{1+2e^{-x-1}}$


(Cf1)
(Cf2)
(△)