

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (04 نقاط):

هذا التمرين هو إستبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال، إقتراح واحد صحيح ، حدد الإجابة الصحيحة مع التبرير:

ج	ب	أ	الأسئلة
$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ تساوي
$h'(x) = \frac{1}{3x^2+1}$	$h'(x) = -\frac{1}{3x^2+1}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2-1}$	(2) إذا كانت $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ وكانت $h(x) = f(3x)$
$\begin{cases} x=2 \\ x=1 \text{ أو} \end{cases}$	$\begin{cases} x=e^2 \\ x=\sqrt{e} \text{ أو} \end{cases}$	$\begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \text{ أو} \end{cases}$	(3) حلول المعادلة $2[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 2 = 0$
$\frac{1}{2}x + \ln 2$	$\frac{1}{2}x + \ln 2 + 1$	$\frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$	(4) أحسن تقريب تالفي للدالة : $x \mapsto \ln(x)$ بجوار 2 هو

التمرين الثاني (4 نقاط) :

- حل المعادلة التفاضلية (I) $2y'+y=0$ ثم عين الحل الخاص f الذي يحقق $f'(0)=1$.
- نعتبر المعادلة التفاضلية (II) $2y'+y=x^2+3x$
- بين ان الدالة g على $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x)=x^2-x+2$ هي حل للمعادلة التفاضلية (II).
- بين انه تكون الدالة h حل للمعادلة التفاضلية (II) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حل للمعادلة التفاضلية (I) استنتج حلا للمعادلة التفاضلية (II)

التمرين الثالث (5 نقاط):

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بالعبارة : $f(x) = x + \frac{ax+b}{(x-2)^2}$ حيث $a ; b$ عدنان حقيقيان و بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$			1		1

و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1. باستعمال جدول تغيرات و عبارة الدالة f أوجد العددين الحقيقيين a ; b ثم إستنتج أن : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$

2. أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها . ثم أكمل جدول تغيراتها .

3. بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل 3 حلول على المجموعة $\mathbb{R} - \{2\}$.

4. أثبت أن : $f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{(x-2)^3}$

5. بين أنه يوجد مماس للمنحنى (C) موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

التمرين الثالث : (08 نقاط)

I - نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

1- أوجد نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها

2- احسب $g'(x)$ ، أدرس إتجاه تغير g ثم شكل جدول التغيرات g .

3- استنتج أنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $g(x) > 0$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$

ليكن \mathcal{C}_f المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

1- (أ) تحقق أنه لأجل كل x من \mathbb{R} أن : $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

2- (أ) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى \mathcal{C}_f .

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى \mathcal{C}_f و المستقيم (d) .

3- بين أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0,40 < \alpha < 0,41$.

4- اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{C}_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

5- أنشئ المماس (Δ) المستقيم (d) والمنحنى (\mathcal{C}_f) .

اساتذة المادة – بالتوفيق للجميع

تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة علوم التجريبية

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
4	(0,5)	<p>(1) الاجابة (ج) : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \frac{1}{24}$</p> <p>لدينا $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$ حالة عدم التعيين لنزيل هذه الحالة نضرب في المرافق فنجد</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(\sqrt{x+7}+3)(x+2)(x-2)}$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+7}+3)(x+2)} = \frac{1}{24}$</p> <p>(2) اذا كانت $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ و كانت $h(x) = f(3x)$ الاجابة (ج) : لأن</p> <p>$h'(x) = 3f'(3x) = \frac{3}{(3x)^2+3} = \frac{3}{9x^2+3} = \frac{1}{3x^2+1}$</p> <p>(3) حلول المعادلة : $2[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 2 = 0$ هي الاجابة (ب) او $\begin{cases} x = e^2 \\ x = \sqrt{e} \end{cases}$</p> <p>نضع $X = \ln(x)$ تصبح المعادلة $2X^2 - 5X + 2 = 0$ كما يلي</p> <p>$\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ X = 2 \end{cases}$ أي ان $\Delta = 9$ نحسب المميز $2X^2 - 5X + 2 = 0$ للمعادلة حلين هما</p> <p>$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ x = e^2 \end{cases}$ او $\begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}} \\ x = e^2 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} \ln(x) = \frac{1}{2} \\ \ln(x) = 2 \end{cases}$ او</p> <p>(4) أحسن تقريب تالفي للدالة : $\ln(x) \mapsto x$ بجوار 2 هو (أ) $\frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$</p> <p>$f(x) = \ln(x)$ ومنه $f'(x) = \frac{1}{x}$ التقريب التالفي للدالة f بجوار 2 هو</p> <p>$f(x) \approx \frac{1}{2}(x-2) + \ln(2)$ أي ان $f(x) \approx f'(2)(x-2) + f(2)$ ومنه</p> <p>$f(x) \approx \frac{1}{2}x + \ln(2) - 1$</p>	التمرين الاول
4	(0,5)	<p>(1) حل المعادلة التفاضلية (I) $2y'+y=0$..... تكافئ $y' = -\frac{1}{2}y$ حلها العام هو $y = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ حيث C ثابت حقيقي .</p> <p>الحل الخاص f الذي يحقق $f'(0) = 1$. أي ان $f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$, ومنه</p> <p>$f'(x) = -\frac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}x}$ بالتعويض بـ 0 نجد $f'(0) = 1$ و $f'(0) = -\frac{1}{2}C$</p> <p>منه $-\frac{1}{2}C = 1$ إذن $C = -2$ وبالتالي نجد $f(x) = -2e^{\frac{1}{2}x}$</p>	التمرين الثاني

- (2) نعتبر المعادلة التفاضلية (II) $2y' + y = x^2 + 3x$
 لدينا $g(x) = x^2 - x + 2$ و $g'(x) = 2x - 1$ و منه
 أي أن $2g'(x) + g(x) = 4x - 2 + x^2 - x + 2 = x^2 + 3x$
 إذن g حل للمعادلة (II).
 إثبات انه تكون الدالة h حل للمعادلة التفاضلية (II) إذا فقط إذا كان $h - g$
 حل للمعادلة التفاضلية (I)
 - إذا كان $h - g$ حل للمعادلة التفاضلية (I) يكافئ $2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$ و
 منه $2h'(x) + h(x) = 2g'(x) + g(x)$ و بما $2g'(x) + g(x) = x^2 + 3x$ فإن
 $2h'(x) + h(x) = x^2 + 3x$ و منه h حل للمعادلة (II).
 - إذا كان h حل للمعادلة (II) يعني أن $2h'(x) + h(x) = x^2 + 3x$ و لدينا
 $2g'(x) + g(x) = x^2 + 3x$ بطرح المعادلتين نجد $2(h - g)'(x) + (h - g)(x) = 0$ و
 منه $h - g$ حل للمعادلة التفاضلية (I).
 استنتاج حلا للمعادلة التفاضلية (II)
 (1) $h(x) - g(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x}$ و منه $h(x) = g(x) + Ce^{-\frac{1}{2}x}$ أي ان $h(x) = x^2 + 3x + Ce^{-\frac{1}{2}x}$.

5

(0,25) × 2

- (1) من جدول التغيرات لدينا $f(1) = 1$ $f(3) = 1$; أي ان $1 + a + b = 1$ و
 $3 + 3a + b = 1$ أي ان $a = -b$ و $3a + b = -2$ و منه بالتعويض نجد
 $-3b + b = -2$ و منه $b = 1$ و $a = -1$ بالتعويض في العبارة نجد
 $f(x) = x + \frac{-x+1}{(x-2)^2}$ بتوحيد المقامات نجد

(0,5)

$$f(x) = \frac{x(x-2)^2 - x + 1}{(x-2)^2} = \frac{x(x^2 - 4x + 4) - x + 1}{(x-2)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - x + 1}{(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$$

2. حساب النهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها:

(0,25) × 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = +\infty$$

(0,5)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

جدول تغيرات الدالة f

(0,5)

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow 1	\searrow $-\infty$	\nearrow	$-\infty$

3. تبين أن المعادلة: $f(x) = 0$(1) تقبل 3 حلول على المجموعة $\mathbb{R} - \{2\}$.

لدينا :

(0,5)

- دالة f متزايدة و مستمرة على المجال $]-\infty; 1]$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty; 1]$
 أي انها تغير إشارتها على المجال $]-\infty; 1]$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1)
 تقبل حلا في المجال $]-\infty; 1]$.

(0,5)

- دالة f متناقصة و مستمرة على المجال $[1; 2[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty; 1]$ أي

<p>(0,5)</p> <p>(0,5)</p> <p>(0,5)</p>	<p>انها تغير إشارتها على المجال $[1;2[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $[1;2[$.</p> <p>f - دالة متزايدة و مستمرة على المجال $]2;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال $]-\infty;+\infty[$ أي انها تغير إشارتها على المجال $]2;+\infty[$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة (1) تقبل حلا في المجال $]2;+\infty[$. مما سبق نستنتج ان للمعادلة (1) ثلاثة حلول على مجموعة تعريفها .</p> <p>4. إثبات أن: $f'(x) = \frac{x^3-6x^2+13x-8}{(x-2)^3}$ لدينا $f(x) = x + \frac{-x+1}{(x-2)^2}$ و منه</p> $f'(x) = 1 + \frac{-(x-2)^2 - 2(x-2)(-x+1)}{(x-2)^4} = 1 + \frac{(x-2)[-x+2+2x-2]}{(x-2)^4} = 1 + \frac{x}{(x-2)^3}$ $f'(x) = \frac{(x-2)^3 + x}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{(x-2)^3}$ <p>5. إثبات أنه يوجد مماس للمنحنى (C) موازي للمستقيم ذو المعادلة $y = x$ اي ان المعادلة $f'(x) = 1$ تقبل حلا</p> <p>$f'(x) = 1$ يكافئ $\frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{(x-2)^3} = 1$ يكافئ $x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = (x-2)^3$ و $x \neq 2$ أي أن $x^3 - 6x^2 + 13x - 8 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$ يكافئ $x = 0$ و منه المنحنى (C) يقبل مماسا عند النقطة $A\left(0; \frac{1}{4}\right)$ موازيا للمنصف الأول ذو المعادلة $y = x$</p>															
<p>7</p> <p>(0,25) × 2</p> <p>(0,25)</p> <p>(0,25)</p> <p>(0,25)</p>	<p>I - نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R} بـ: $g(x) = 4xe^{2x} + 1$</p> <p>1- النهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^{2x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4xe^{2x} = 0$)</p> <p>2- حساب $g'(x)$: $g(x) = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 4(1+2x)e^{2x}$ إشارتها من إشارة $(1+2x)$</p> <p>و منه g متزايدة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ و متناقصة على المجال $] -\infty; -\frac{1}{2}]$.</p> <p>شكل جدول التغيرات g:</p> <table border="1" data-bbox="347 1518 1225 1709"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>1</td> <td></td> <td>$-2e^{-1} + 1$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table> <p>3- استنتاج أنه من أجل كل x من \mathbb{R}: $g(x) > 0$ مما سبق لاحظنا من جدول تغيرات الدالة تقبل قيمة حدية صغرى هي $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ عدد موجب تماما و منه من أجل كل x من \mathbb{R}: $g(x) > 0$.</p> <p>II - نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ: $f(x) = x + (2x-1)e^{2x}$ ليكن c_f المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس.</p>	x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$g'(x)$		-	0	+	$g(x)$	1		$-2e^{-1} + 1$	$+\infty$	<p>التمرين الرابع</p>
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$													
$g'(x)$		-	0	+												
$g(x)$	1		$-2e^{-1} + 1$	$+\infty$												

(0,25)

(0,25)

(0,25)×2

(0,5)

(0,5)

(0,25)

(0,5)

(1)

(0,5)

(1)

1- أ) التحقق أنه لأجل كل x من \mathbb{R} أن $f'(x) = g(x)$:

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 1 + 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} = 1 + 4xe^{2x} = g(x)$$

الدالة f متزايدة على \mathbb{R} لأن g موجبة على \mathbb{R} .

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2

2- أ) إثبات أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى \mathcal{C}_f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1)e^{2x} = 0$$

ب) دراسو وضعية المنحنى \mathcal{C}_f بالنسبة للمستقيم (d) لدينا $[f(x) - x] = (2x-1)e^{2x}$

إشارة الفرق من إشارة $(2x-1)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
إشارة $2x-1$	-	0	+
الوضعية	(\mathcal{C}_f) يقع تحت (d)	(\mathcal{C}_f) يقطع (d)	(\mathcal{C}_f) يقع فوق (d)

3- إثبات أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق

$$0,40 < \alpha < 0,41 \text{ . بما أن } f \text{ مستمرة و متزايدة على } \mathbb{R} \text{ و } f(0,40) = -0,04511$$

$$\text{فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا}$$

α .

4- كتابة معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (\mathcal{C}_f) عند النقطة ذات الفاصلة $0 : y = x - 1$

5- أنشئ المماس (Δ) المستقيم (d) والمنحنى (\mathcal{C}_f) .

