اختبار الفصل الأول

◄ تنبيه: الإجابة تكون بمنهجية واضحة ودقيقة وباستعمال اللون الأزرق والأسود فقط ►

◄ التمرين الأول [05 نقاط]

لكل سؤال إجابة واحد من ثلاث إجابات مقترحة، اختر الجواب الصحيح مع التبرير.

① إذا كان منحني الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x = 2$ فإن:

أ) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = 1$ ب) $\lim\limits_{h\to 2}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right) = 0$ ج) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = +\infty$

② حلول المعادلة التفاضلية: $y = \sqrt{2}y' - 1$ هي حلول الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $f: x \longmapsto ce^{\sqrt{2}x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $f: x \longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ ج) $f: x \longmapsto ce^{\frac{1}{\sqrt{2}}x} + 1$

③ حلول المتراجحة: $2\ln(x-1) > 1$ هي:

أ) $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ ب) $]1; +\infty[$ ج) $]e; +\infty[$

④ f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ وَ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)\right) = 0$ ، لدينا:

أ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\ln\left(f(x)\right)\right) = 1$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\ln\left(f(x)\right)\right)$ غير موجودة ج) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\ln\left(f(x)\right)\right) = -\infty$

⑤ إذا كان $f(x) = ln\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$ ، فإن:

أ) $f' = \dfrac{g'\cdot h + h'\cdot g}{h^2}$ ب) $f' = \dfrac{g'\cdot h - h'\cdot g}{g\cdot h}$ ج) $f' = \dfrac{g'\cdot h - h'\cdot g}{h^2}$

◄ التمرين الثاني [04 نقاط]

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

① احسب u_1، u_2 و u_3 .

② نضع من أجل كل عدد n : $v_n = u_n - 2n + 6$.

أ/ احسب v_0، v_1 وv_2.

ب/ اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها.

ج/ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

◄ التمرين الثالث [09 نقاط]

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 2x - 7 + 2e^x$$

① ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

② اثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$.

③ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

① ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

② احسب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

③ أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y = 2x - 5$ بجوار $+\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

④ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

⑤ أ/ بين أن الدالة h المعرفة على المجال $I = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{(2x - 5)^2}{2x - 7}$$

متزايدة تماما على I .

ب/ بيّن أن:

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2a - 7}$$

ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

⑥ مثل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) .

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x) = -2m \dots (E)$$

تصحيح اختبار الفصل الأول

◄ التمرين الأول [05 نقاط]

السؤال	الجواب الصحيح	التبرير
إذا كان منحنى الدالة f يقبل مماسا معادلته: $x = 2$ فإن:	$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = +\infty$ 0.25ن	لما $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \pm\infty$ الدالة f تقبل مماسا عموديا معادلته $x = a$ 0.5ن
حلول المعادلة التفاضلية: $y = \sqrt{2}y' - 1$ هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:	0.25ن $f: x \longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$	الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $x \longmapsto y(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث: $c \in \mathbb{R}$ 0.5ن ولدينا: $y = \sqrt{2}y' - 1 \Rightarrow y' = \frac{y+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 0.5ن اذن حلول المعادلة التفاضلية هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: 0.5ن $f: x \longmapsto ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$
حلول المتراجحة: $2\ln(x-1) > 1$	0.25ن $]\sqrt{e}+1; +\infty[$	لدينا: $2\ln(x-1) > 1 \Rightarrow \ln(x-1) > \frac{1}{2}$ 0.5ن $\Rightarrow x - 1 > e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > \sqrt{e} + 1$ ومنه مجموعة الحلول هي: $x \in]\sqrt{e}+1; +\infty[$
f دالة موجبة تماما على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = 0$	$\lim_{x\to-\infty}[\ln(f(x))] = -\infty$ 0.25ن	نضع: $u(x) = \ln x$ و 0.5ن $v(x) = (u \circ f)(x) = \ln(f(x))$ ومنه: $\lim_{x\to-\infty}[\ln(f(x))] = \lim_{x\to 0}[u(x)] = \lim_{x\to 0}[\ln x] = -\infty$
إذا كان: $f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)$ فإن:	0.25ن $f' = \frac{g'\cdot h - h'\cdot g}{g\cdot h}$	$f' = \frac{\left(\frac{g'\cdot h - h\cdot g}{h^2}\right)}{\frac{g}{h}} = \frac{\left(\frac{g'\cdot h - h\cdot g}{h}\right)}{g}$ $= \frac{g'\cdot h - h'\cdot g}{g\cdot h}$ 0.5ن

◄ التمرين الثاني [04 نقاط]

① حساب u_1، u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{u_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{1}{4}}$$

0.5ن

$$u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{7}{8}}$$

②

أ/ حساب v_0، v_1، v_2 :

$$v_0 = u_0 - 2(0) + 6 \Rightarrow \boxed{v_0 = 7}$$
$$v_1 = u_1 - 2(1) + 6 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{7}{2}}$$
$$v_2 = u_2 - 2(2) + 6 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{7}{4}}$$

0.5ن

ب/ اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 6 = \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 = \frac{1}{2}u_n - n + 3 = \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) = \frac{1}{2}v_n$$

ولدينا: $v_0 = 7$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 7 .

0.5ن

ج/ كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

0.5ن

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

$$v_n = u_n - 2n + 6 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 6 \Rightarrow u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$$

0.5ن

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6\right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

0.5ن

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n:

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 6 = v_n + w_n$$

حيث (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$
$$= v_0 + 2(0) - 6 + v_1 + 2(1) - 6 + \cdots + v_n + 2n - 6$$

نضع $w_n = 2n - 6$

نلاحظ أن w_n عبارة متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6 ومنه:

$$S_n = (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (w_0 + w_1 + \cdots + w_n)$$
$$= 7\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n-6-6)}{2}$$
$$= 7\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}\right) + (n+1)\frac{(2n-12)}{2}$$
$$= \boxed{14\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-6)}$$

1ن

◄ التمرين الثالث [09 نقاط]

(I

① دراسة تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[2x-7+2e^{x}] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[2x-7+2e^{x}] = +\infty$

0.5ن

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 + 2e^{x} > 0$$

0.25ن

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0.25ن

② اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 1$:

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(0.5) \cong -2.7$ و $g(1) \cong 0.43$

0.5ن

ولدينا: $g(1) \times g(0.5) < 0$

ومنه فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5;1[$.

③ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0.25ن

(II

① دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (2x-5)(1-e^{-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-5=0 \\ \text{أو} \\ 1-e^{-x}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=5 \\ \text{أو} \\ e^{-x}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ \text{أو} \\ -x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ \text{أو} \\ x=0 \end{cases}$$

0.5ن

ومنه:

x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-e^{-x}$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

0.5ن

② حساب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2x-5)(1-e^{-x})] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(2x-5)(1-e^{-x})] = +\infty$

0.5ن

③ أ/ تبيين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) معادلته $y = 2x - 5$ بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}[(2x-5)(1-e^{-x}) - (2x-5)] = \lim_{x\to+\infty}[(2x-5)(1-e^{-x}-1)]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}[-e^{-x}(2x-5)] = \lim_{x\to+\infty}[5e^{-x} - 2xe^{-x}] = 0 - 0 = 0$$ 0.5ن

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow -e^{-x}(2x-5) = 0 \Rightarrow e^{-x}(-2x+5) = 0 \Rightarrow -2x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$ 0.25ن

0.25ن

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية: 0.25ن

- لما $x \in \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ المنحني (C_f) فوق (D).
- لما $x = \frac{5}{2}$ المنحني (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$
- لما $x \in \left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ المنحني (C_f) تحت (D).

④ أ/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$:

$$f'(x) = 2(1-e^{-x}) + e^{-x}(2x-5) = 2 - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 5e^{-x} = -7e^{-x} + 2xe^{-x} + 2$$
$$= e^{-x}(-7 + 2x + 2e^{x}) = e^{-x} \cdot g(x)$$ 0.5ن

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$

0.25ن

0.25ن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ أ/ تبيين أن الدالة h المعرفة على المجال $I = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right]$ كما يلي: $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ متزايدة تماما على I .

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(2)(2x-5)(2x-7) - 2(2x-5)^2}{(2x-7)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2(2x-5)(2(2x-7) - 2x + 5)}{(2x-7)^2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{2(2x-5)(2x-9)}{(2x-7)^2} = 0$$

لما: $x \in I$

0.5ن

لدينا $(2x-7)^2 > 0$ و $(2x-5) > 0$ و $(2x-9) > 0$ إذن: $h'(x) > 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على I .

ب/ تبيين أن $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$:

لدينا

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow -7 + 2\alpha + 2e^{\alpha} = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{7-2\alpha}{2} \Rightarrow e^{-\alpha} = \frac{2}{7-2\alpha}$$ 0.25ن

ولدينا:

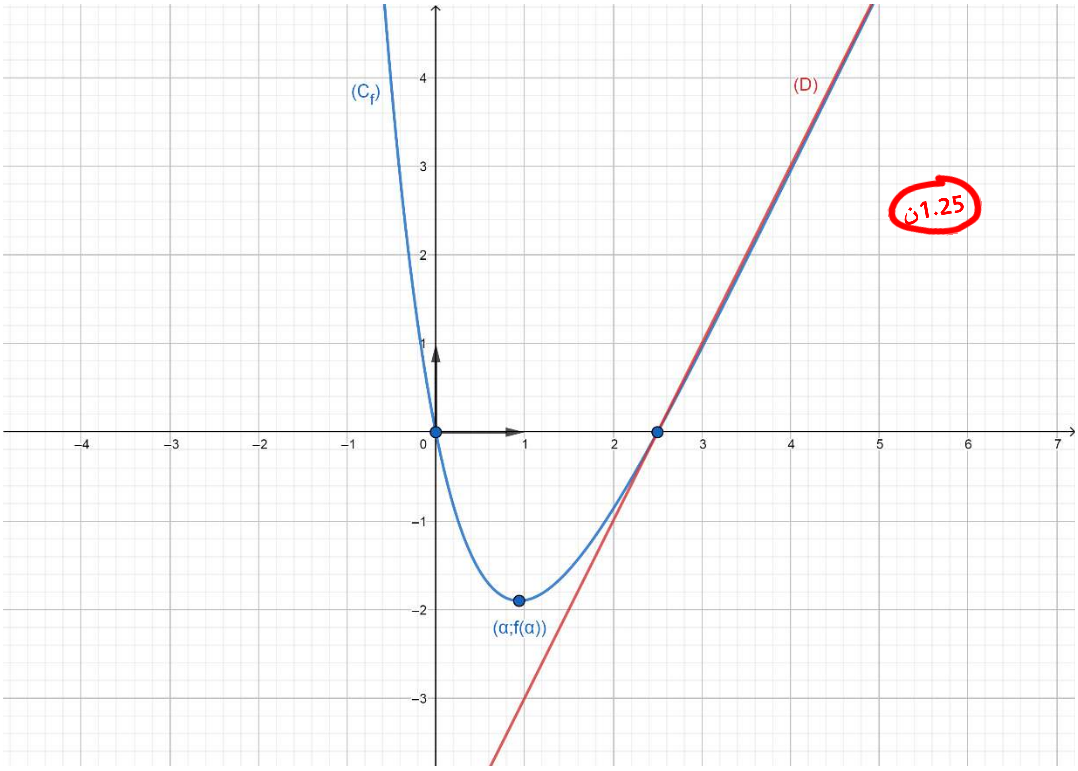
$$f(\alpha) = (2\alpha-5)(1-e^{-\alpha}) = (2\alpha-5)\left(1 - \frac{2}{7-2\alpha}\right) = (2\alpha-5)\left(\frac{7-2\alpha-2}{7-2\alpha}\right) = -(2\alpha-5)\left(\frac{2\alpha-5}{7-2\alpha}\right)$$
$$= -\frac{(2\alpha-5)^2}{7-2\alpha} = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} = h(\alpha)$$ 0.25ن

- حصر $f(\alpha)$:

بما أن الدالة h متزايدة تماما لدينا: 0.5ن

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1 \Rightarrow h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1) \Rightarrow -\frac{8}{3} < h(\alpha) < -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{8}{3} < f(\alpha) < -\frac{9}{5}$$

⑥ التمثيل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) :



⑦ المناقشة البيانية:

لما	$-2m < f(\alpha)$	أي	$m > -\frac{f(\alpha)}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$-2m = f(\alpha)$	أي	$m = -\frac{f(\alpha)}{2}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$0 > -2m > f(\alpha)$	أي	$-\frac{f(\alpha)}{2} > m > 0$	للمعادلة حلان موجبان متمايزان
لما	$-2m = 0$	أي	$m = 0$	للمعادلة حل موجب وحل معدوم
لما	$-2m > 0$	أي	$m < 0$	للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

0.75ن