

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول (8 نقاط)

- نعتبر في المجموعة \mathbb{R} المعادلة التفاضلية : $(E): y'+2y = 3x^2 - 1$
- 1- برهن أنه توجد دالة كثير حدود وحيدة p من الدرجة الثانية هي حل للمعادلة (E) .
 - 2- عين في \mathbb{R} مجموعة حلول المعادلة التفاضلية : $(E'): y'+2y = 0$.
 - 3- برهن أن دالة g هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g-p)$ هي حل للمعادلة (E') .
 - 4- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) في المجموعة \mathbb{R} .
 - 5- عين الحل g للمعادلة (E) و الذي يأخذ القيمة $\frac{9}{4}$ من أجل القيمة 0 للمتغير .

التمرين الثاني (12 نقطة)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln(x)$

- 1- أدرس تغيرات الدالة g .
- 2- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
 - 2- برهن أن ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$) ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - 3- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$ ،
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
 - 4- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .
ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث $0.3 < \alpha < 0.4$.
ج) أرسم (Δ) و (C_f) .
 - 5- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ : $h(x) = f(-x)$
- اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) انطلاقا من المنحني (C_f) ثم أرسم (C_h) .

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح 🌸 أستاذ الماوة

نوفمبر 2014

تصحيح الاختبار الأول

الشعبة : تقني رياضي

ثانوية بلعاج قاسم نور الدين - الشلف

December 3, 2014

من أنجاز : الأستاذ ثابت إبراهيم

التنقيط	الإجابة
08 نقاط	<p>التمرين الأول :</p> <p>لدينا : $(E) : y' + 2y = 3x^2 - 1$</p>
02	<p>1- تبين أنه توجد دالة وحيدة P كثير حدود من الدرجة الثانية حل للمعادلة (E) :</p> <p>نفرض أن $P(x) = ax^2 + bx + c$</p> <p>حل للمعادلة (E) يعني $P'(x) + 2P(x) = 3x^2 - 1$</p> <p>ولدينا : $P'(x) = 2ax + b$</p> <p>إذن : $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = 3x^2 - 1$ أي $2ax^2 + (2b + 2a)x + b + 2c = 3x^2 - 1$</p> <p>بالمطابقة نجد : $\begin{cases} 2a = 3 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -a = -\frac{3}{2} \\ 2c = -1 - b = -1 + \frac{3}{2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$</p> <p>وبالتالي $P(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ حل للمعادلة (E)</p>
01	<p>2- تعيين في \mathbb{R} مجموعة حلول المعادلة التفاضلية : $(E') : y' + 2y = 0$</p> <p>$y' + 2y = 0$ تكافئ $y' = -2y$</p> <p>مجموعة حلول المعادلة (E') من الشكل $y = \lambda e^{-2x}$ حيث λ عدد حقيقي .</p>
01 + 01	<p>3- البرهان أن دالة g هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g - p)$ هي حل للمعادلة (E') :</p> <p>إذا كانت g هي حل للمعادلة (E) فإن $g'(x) + 2g(x) = 3x^2 - 1$</p> <p>ومنه $g'(x) + 2g(x) = P'(x) + 2P(x)$ لأن P حل للمعادلة (E)</p> <p>أي $g'(x) + 2g(x) - P'(x) - 2P(x) = 0$</p> <p>وبالتالي : $g'(x) - P'(x) + 2g(x) - 2P(x) = 0$</p> <p>أي $(g' - P')(x) + 2(g - P)(x) = 0$</p> <p>إذن $(g - p)$ حل للمعادلة (E')</p> <p>إذا كانت $(g - p)$ حل للمعادلة (E') فإن $(g' - P')(x) + 2(g - P)(x) = 0$</p> <p>ومنه $g'(x) - P'(x) + 2g(x) - 2P(x) = 0$</p> <p>أي $g'(x) + 2g(x) = P'(x) + 2P(x)$</p> <p>وبالتالي : $g'(x) + 2g(x) = 3x^2 - 1$ إذن g هي حل للمعادلة (E)</p>
01.5	<p>4- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (E) في المجموعة \mathbb{R} :</p> <p>لدينا : $(g - p)(x) = \lambda e^{-2x}$ لأن $(g - p)$ حل للمعادلة (E')</p> <p>ومنه : $g(x) = \lambda e^{-2x} + P(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ أي</p> <p>$g(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}, (\lambda \in \mathbb{R})$</p>
	<p>5- تعيين الحل g للمعادلة (E) و الذي يأخذ القيمة $\frac{9}{4}$ من أجل القيمة 0 للمتغير :</p>

• لدينا : $g(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}, (\lambda \in \mathbb{R})$

• معناه $g(0) = \frac{9}{4}$ أي $\lambda e^{-2(0)} + \frac{3}{2}(0)^2 - \frac{3}{2}(0) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

• ومنه $\lambda = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9-1}{4} = 2$

• ومنه $g(x) = 2e^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

12 نقطة

التمرين الثاني

I. لدينا : $g(x) = x^2 - 1 - 2\ln(x)$ $D_g =]0; +\infty[$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

0.25
+
0.25

• حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 - 2\ln(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1 - 2\ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

• حساب المشتقة :

0.75

أي $g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$ $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

• دراسة إشارة المشتقة : إشارة المشتقة من نفس إشارة $2(x-1)(x+1)$

0.5

x	0	1	$+\infty$
$2(x-1)(x+1)$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+

• جدول تغيرات الدالة g :

0.5

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(2) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

0.5

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

إذن من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $g(x) \geq 0$

II. لدينا : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$ $D_f =]0; +\infty[$

-1 حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

0.25
+
0.25

لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-(\ln x)^2) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} \right) = -\infty$

- التفسير الهندسي : $x = 0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C_f)

-2 البرهان أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$:

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$

• نضع : $\sqrt{x} = t$ ومنه $x = t^2$

01	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4(\ln t)^2}{t^2} = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$ <p>إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ أي</p> <p>لأن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$</p>																				
0.5	<p>• حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$ <p>أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$</p>																				
01	<p>3- أ) تبيان أن : $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$ من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$:</p> <p>- لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{-2 \ln x \times \frac{1}{x} \times x - (1 - (\ln x)^2)}{x^2} = 1 + \frac{-2 \ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$</p> <p>أي $f'(x) = \frac{x^2 - 2 \ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2} = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$ ومنه</p> <p>$f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$</p>																				
01	<p>ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :</p> <p>* دراسة إشارة المشتقة : من نفس إشارة $g(x) + (\ln x)^2$</p> <table border="1" data-bbox="279 1041 1109 1310"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$g(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$(\ln x)^2$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$g(x) + (\ln x)^2$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	x	0	1	$+\infty$	$g(x)$		+	0	$(\ln x)^2$		+	0	$g(x) + (\ln x)^2$		+	0	$f'(x)$		+	0
x	0	1	$+\infty$																		
$g(x)$		+	0																		
$(\ln x)^2$		+	0																		
$g(x) + (\ln x)^2$		+	0																		
$f'(x)$		+	0																		
0.5	<p>• جدول تغيرات الدالة f :</p> <table border="1" data-bbox="279 1355 1109 1590"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td></td> <td>$+\infty$</td> </tr> </tbody> </table> <p>2</p>	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$		+	0	$f(x)$			$+\infty$								
x	0	1	$+\infty$																		
$f'(x)$		+	0																		
$f(x)$			$+\infty$																		
0.5	<p>4- أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$:</p> <p>لدينا :</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 0$ <p>ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.</p>																				
	<p>ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :</p> <p>ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$</p> <p>• لدينا : $f(x) - y = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x} - x = \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$</p>																				

0.5

$$\frac{1 - (\ln x)^2}{x} = 0 \text{ يعني } f(x) - y = 0$$

$$\text{ومنه } 1 - (\ln x)^2 = 0 \text{ و } x \neq 0 \text{ أي } (\ln x)^2 = 1$$

$$\text{- إما } \ln x = 1 \text{ ومنه } x = e \text{ (مقبول لأن } [0; +\infty[\text{)}$$

$$\text{- أو } \ln x = -1 \text{ ومنه } x = e^{-1} \text{ (مقبول لأن } [0; +\infty[\text{)}$$

0.75

x	0	e^{-1}	e	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	0	+	+
$1 - \ln x$	+	0	+	-
$1 - (\ln x)^2$	-	0	+	-
$f(x) - y$	-	0	+	-
التسبيح الوضع		تحت (C_f) (Δ) فوق (C_f) (Δ)		تحت (C_f) (Δ)

(ب) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$:

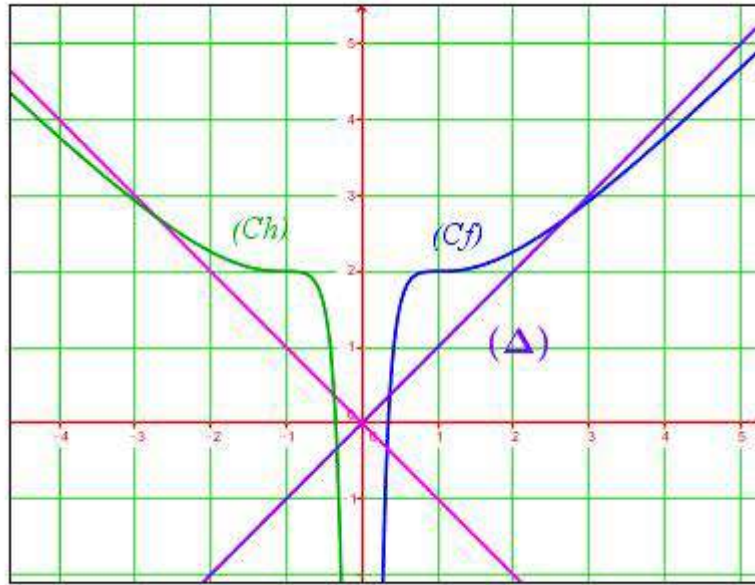
الدالة f مستمرة ورتبية تماما على المجال $[0.3; 0.4]$ ولدينا :

$$f(0.3) = -0.2 \text{ و } f(0.4) = 0.08 \text{ أي } f(0.3) \times f(0.4) < 0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$

(ج) الرسم :

01+01



0.25

$$D_h =]-\infty; 0[\quad h(x) = f(-x) \text{ لدينا :}$$

• كيفية رسم المنحني (C_h) باستعمال المنحني (C_f) :

لدينا : $h(x) = f(-x)$ يعني أن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الترتيب .

