تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) إستنتج أن (u_n) متقاربة , ثم أحسب نهايتها.

3) (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{1}{2} + \ln\sqrt{u_n}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{3}{2}$.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n, ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n , أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \cdots + \frac{1}{1+\ln u_n}$.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1-x)e^x$.

1) أ) أحسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$.

ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

3) تحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم تحقق أن : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 + \frac{x}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $3Cm$).

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2) إستنتج إتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$.

3) أوجد نهايات الدالة f عند $-\infty$ ثم عند $+\infty$, شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن $f(\alpha) = \alpha$ و $f(-\alpha) = 0$.

5) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ).

6) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) لـ (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = -\alpha$.

7) أرسم (Δ) , (T) و (C_f) في المعلم السابق.

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$.

III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) بإستعمال (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون الحساب.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

3) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$, إستنتج تقارب المتتالية (u_n).

التمرين الثالث: (07 نقاط)

I) h دالة معرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $h(x) = 1 - \frac{x^2}{2-x}$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} h(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

3) حل في $]-\infty;2[$ المعادلة $h(x) = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) عين من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[$ إشارة $h(x)$.

II) f دالة معرفة على المجال $]-\infty;2[$ بـ : $f(x) = x^2 + 6x - 2 + 8ln(2-x)$, (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) أثبت أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[$ أن : $f'(x) = 2h(x)$, ثم إستنتج إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) تحقق أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

4) أكتب معادلة المماس (T) عند نقطة من (C_f) فاصلتها 0.

5) أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المجال $]1.7;1.8[$.

6) أرسم (C_f) و (T).

7) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ : $g(x) = x^2 + 6|x| - 2 + 8ln(2-|x|)$.

أ) برهن أن $g(x)$ زوجية, ماذا تستنتج بيانيا .

ب) أكتب g دون رمز القيمة المطلقة.

ج) إنطلاقا من التمثيل البياني لـ (C_f) إشرح كيفية إنشاء (C_g), ثم أرسم (C_g).

إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما ، وإذا كنت لا تريد فستجد عذرا .

أستاذ المادة : مريان محمد

التصحيح النموذجي لإختبار الفصل الأول

إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما، وإذا كنت لا تريد فستجد عذرا.

التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا : $u_1 = e^2$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$.

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$:

نسمي الخاصية بـ : $p(n) : u_n > \frac{1}{e}$

1) مرحلة التحقق :

نتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ من أجل $n = 1$: $u_1 = e^2 > \frac{1}{e}$ و منه $p(1)$ محققة.

2) مرحلة الفرضية و البرهان :

نفرض أن الخاصية $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أي : $u_n > \frac{1}{e}$ و نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي نبرهن أن : $u_{n+1} > \frac{1}{e}$.

لدينا : $u_n > \frac{1}{e}$ و منه : $\sqrt{u_n} > \sqrt{\frac{1}{e}}$ و منه : $\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}$ بالضرب في $e^{-\frac{1}{2}}$

نجد : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{2}}$ إذن : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > e^{-1}$ أي : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n} > \frac{1}{e}$ إذن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة من أجل $n+1$

و منه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع : $p(n) : u_n > \frac{1}{e}$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

2 أ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$:

أي نبرهن : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n}}{u_n} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}.\sqrt{u_n}} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}} - 1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n}}$$

ندرس إشارة البسط $e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n}$ لدينا من البرهان بالتراجع $u_n > e^{-1}$ أي : $\sqrt{u_n} > \sqrt{e^{-1}}$ و منه :
$\sqrt{u_n} > e^{-\frac{1}{2}}$ و منه : $e^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{u_n} < 0$ و منه : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

إستنتاج إتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

ب لدينا من البرهان بالتراجع : $u_n > \frac{1}{e}$ أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بـ $\frac{1}{e}$ و هي متناقصة على $\mathbb{N}^*$ إذن فهي متقاربة نحو العدد ℓ.

حساب نهاية (u_n) : بما أن (u_n) متقاربة $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ و $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}$ و منه : $\ell = e^{-\frac{1}{2}} \lim_{n\to+\infty}\sqrt{u_n}$ و منه : $\ell = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ell}$.

إذن نحل هذه المعادلة ,نربع الطرفين فتصبح : $\ell^2=(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\ell})^2$ و منه : $\ell^2=e^{-1}\ell$

إذن : $\ell^2-e^{-1}\ell=0$ إذن : $\ell(\ell-e^{-1})=0$ يعني : $\ell=0$ (مرفوض) أو $\ell-e^{-1}=0$ و منه : $\ell=e^{-1}$.

3 لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$.

أ البرهان أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n})$$
$$v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln e^{-\frac{1}{2}}+\ln\sqrt{u_n})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n})=\frac{1}{2}(1+(-\frac{1}{2})+\ln\sqrt{u_n})$$
$$v_{n+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n})=\frac{1}{2}.v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول :

$v_1=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_1}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{e^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln e^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

ب عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_1.q^{n-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

إستنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{u_n}$ و منه : $v_n-\frac{1}{2}=\ln\sqrt{u_n}$ و منه : $v_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln u_n$ و منه :

$2v_n-1=\ln u_n$ و منه: $e^{2v_n-1}=u_n$, إذن : $u_n=e^{2\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^{n-1}-1}$ و بالتالي : $u_n=e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1}$.

حساب نهاية u_n :

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1}=e^{-1}$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{2})^{n-1}=0$ لأن : $-1<\frac{1}{2}<1$.

4 حساب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{1}{1+\ln u_1}+\frac{1}{1+\ln u_2}+\cdots+\frac{1}{1+\ln u_n}$

$$\frac{1}{1+\ln u_n}=\frac{1}{1+\ln(e^{3(\frac{1}{2})^{n-1}-1})}=\frac{1}{1+3(\frac{1}{2})^{n-1}-1}=\frac{1}{3(\frac{1}{2})^{n-1}}$$
$$S_n=\frac{1}{1+\ln u_1}+\frac{1}{1+\ln u_2}+\cdots+\frac{1}{1+\ln u_n}=\frac{1}{3(\frac{1}{2})^0}+\frac{1}{3(\frac{1}{2})^1}+\cdots+\frac{1}{3(\frac{1}{2})^{n-1}}$$
$$S_n=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\frac{1^0}{2^0}}+\frac{1}{\frac{1^1}{2^1}}+\cdots+\frac{1}{\frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{2^0}{1^0}+\frac{2^1}{1^1}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{1^{n-1}}\right]$$
$$S_n=\frac{1}{3}[2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}]=\frac{1}{3}\left[1\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)\right]=\frac{1}{3}(2^n-1)$$

التمرين الثاني: (08 نقاط)

(I $x\in\mathbb{R}\ /\ g(x)=1+(1-x)e^x$

1 أ نهاية g عند $+\infty$ و $-\infty$

$g(x)=1+e^x-x.e^x$ و منه : $\lim_{x\to-\infty}1+e^x-x.e^x=1$ لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}x.e^x=0$.

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$.

ب إتجاه تغير الدالة g:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = -e^x + (1-x).e^x = e^x.(-1+1-x) = -x.e^x$

و بذلك إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$ لأن : $e^x > 0$

و بالتالي g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = 1 + e^0 = 2$.

2 التحقق أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\mathbb{R}$

في المجال $]-\infty;0]$ لدينا : $1 < g(x) \leqslant 2$ و متزايدة تماما و منه $g(x) = 0$ لا تقبل حلا في المجال $]-\infty;0]$
لكن في المجال $[0;+\infty[$ فإن : $g(x) \leqslant 2$ و g متناقصة تماما على المجال إذا $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.

و بذلك المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$.

3 التحقق أن : $1.27 < \alpha < 1.28$ بما أن : $g(1.27) \simeq 0.039$ و $g(1.28) \simeq -0.007$.

فإن : $g(1.27) \times g(1.28) < 0$ إذن : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $1.27 < \alpha < 1.28$.

إستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من جدول تغيرات الدالة g و $g(\alpha) = 0$ نستنتج جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

التحقق أن $e^{-\alpha} = \alpha - 1$:

لدينا : $g(\alpha) = 0$ و منه : $1 + (1-\alpha).e^{\alpha} = 0$ و منه : $e^{-\alpha} \times 1 + (1-\alpha).e^{\alpha} = 0$

و منه : $e^{-\alpha} + (1-\alpha)e^0 = 0$ و منه : $e^{-\alpha} + (1-\alpha) = 0$ و بالتالي : $e^{-\alpha} = \alpha - 1$.

(II $x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = 1 + \dfrac{x}{e^x+1}$.

1 التحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \dfrac{(e^x+1) - e^x.x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{1 + (1-x).e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.

2 **إتجاه تغير الدالة f :**

بما أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و بالتالي : الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ و متناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$.

3 **نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$:**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1+\dfrac{x}{e^x+1}=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

4 **التحقق أن $f(\alpha)=\alpha$ و $f(-\alpha)=0$:**

لدينا : $f(\alpha)=1+\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}$ و من جهة أخرى لدينا : $e^{-\alpha}=\alpha-1$ فإن : $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ و بذلك :

$f(\alpha)=1+\dfrac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=1+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{1+\alpha-1}=1+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha}=1+\alpha-1=\alpha$ إذن : $f(\alpha)=\alpha$.

لدينا : $f(-\alpha)=1+\dfrac{-\alpha}{e^{-\alpha}+1}$ و منه : $f(-\alpha)=1+\dfrac{-\alpha}{\alpha-1+1}=1+\dfrac{-\alpha}{\alpha}=1-1=0$.

إذن : $f(-\alpha)=0$.

5 **أ** **إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{e^x+1}-x-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x+1}-x$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-x.e^x-x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x.e^x}{e^x+1}=0$ لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x.e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$ و بذلك المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=x+1$ بجوار $-\infty$.

ب **الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) :**

ندرس إشارة الفرق $(f(x)-y_\Delta)$ على $\mathbb{R}$.

$$f(x)-y_\Delta=1+\frac{x}{e^x+1}-x-1=\frac{x}{e^x+1}-x=\frac{x-x.e^x-x}{e^x+1}=\frac{-x.e^x}{e^x+1}=-x\times\frac{e^x}{e^x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة $-x$ على $\mathbb{R}$ لأن : $\dfrac{e^x}{e^x+1}>0$.

و بذلك : (C_f) يقع فوق (Δ) في المجال $]-\infty;0[$

و (C_f) يقع أسفل (Δ) في المجال $]0;+\infty[$

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0;1)$	(C_f) تحت (Δ)

6 كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-\alpha$:

$(T): y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$.

$$f(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha+1})^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{\alpha^2}=\frac{1+\alpha^2-1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$$

و لدينا : $f(-\alpha)=0$ و بالتالي : $(T): y=x+\alpha$.

7 رسم (Δ) , (T) و (C_f) :

8 المناقشة البيانية : $(I)\mapsto f(x)=x+f(m)$

و منه (I) تكافئ : $y=f(x)$ و $y=x+f(m)$ (مناقشة مائلة).

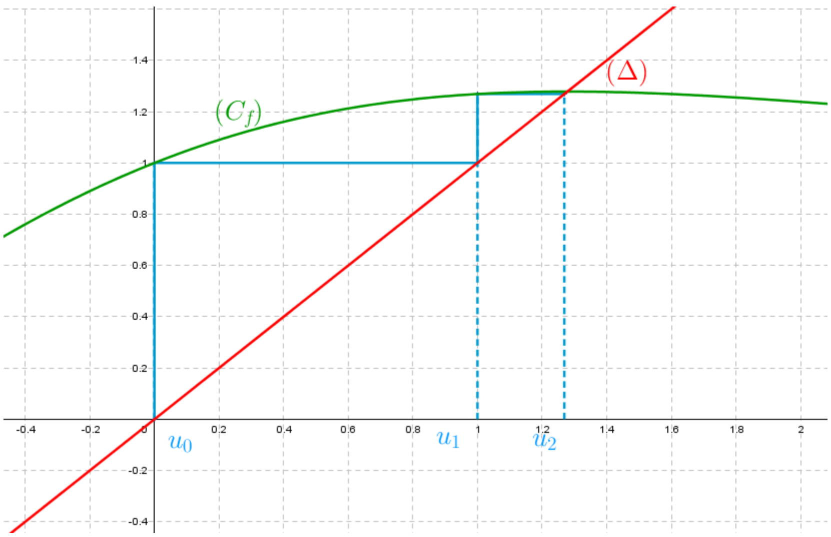
و منه حلول المعادلة (I) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم : $(\Delta_m): y=x+f(m)$ ميله ثابت 1 نلاحظ أن : $m=-\alpha$ فإن : $(\Delta_m)=(T)$ و $m=0$ فإن : $(\Delta_m)=(\Delta)$.

من البيان نستنتج أن :

- ✍ $m\in]-\infty;0[$ المعادلة تقبل حل موجب.
- ✍ $m=0$ المعادلة تقبل حل معدوم.
- ✍ $m\in]0;\alpha[$ المعادلة تقبل حلين سالبين.
- ✍ $m=\alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب $-\alpha$.
- ✍ $m\in]\alpha;+\infty[$ المعادلة تقبل حلين سالبين.

(III
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 تمثيل الحدود على محور الفواصل :



2 إثبات بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$:

1) مرحلة التحقق : من أجل $n = 0$ $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 0 \leqslant 0 \leqslant \alpha \end{cases}$ و منه $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$ محققة .

2) مرحلة الفرضية و البرهان : نفرض أن $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ و نبرهن أن $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

لدينا : $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ و f متزايدة على $[0;\alpha]$ و منه : $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\alpha)$ و منه $0 \leqslant 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ و بذلك $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ محققة.

و منه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع : $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

3 إثبات أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ على $\mathbb{N}$ لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 1 + \dfrac{u_n}{e^{u_n}+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e^{u_n} + 1 + u_n - u_n.e^{u_n} - u_n}{e^{u_n}+1} = \frac{1 + (1-u_n)e^{u_n}}{e^{u_n}+1} = \frac{g(u_n)}{e^{u_n}+1}$$

بما أن : $0 \leqslant u_n\alpha$ فإن : $2 \leqslant g(u_n) \leqslant 0$ و منه : $g(u_n) \geqslant 0$ و من جهة اخرى $e^{u_n} + 1 > 0$ و بذلك :

$\dfrac{g(u_n)}{e^{u_n}+1} \geqslant 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ و بالتالي : (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4 إستنتاج تقارب المتتالية (u_n) : بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

(I $h(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2-x} \qquad / \ x \in]-\infty;2[$

1 حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{x^2}{2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \ .$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} 1 - \frac{x^2}{2-x} = -\infty$ لأن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} 2 - x = 0^+$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} -x^2 = -4$.

2 إتجاه تغير الدالة h :

$$h'(x) = \frac{-2x(2-x) - (-1)(-x^2)}{(2-x)^2} = \frac{-4x + 2x^2 - x^2}{(2-x)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(2-x)^2} = \frac{-x(-x+4)}{(2-x)^2}$$

و منه إشارة $h'(x)$ من إشارة $(-x)$ لأن : $\frac{-x+4}{(2-x)^2} > 0$ على $]-\infty;2[$.

x	$-\infty$		0		2
$-x$		$+$	0	$-$	‖

و منه h متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و متناقصة تماما على $[0;2[$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		0		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$ ‖

$h(1) = 1 - \frac{(1)^2}{2-1} = 1 - 1 = 0$.

3 حل المعادلة $h(x) = 0$:

$h(x) = 0$ و منه : $1 - \frac{x^2}{2-x} = 0$ و منه : $\frac{x^2}{2-x} = 1$ و منه : $x^2 = 2 - x$ و منه : $x^2 + x - 2 = 0$ و منه : $(x-1)(x+2) = 0$ أي : $x - 1 = 0$ أي : $x = 1$ أو $x + 2 = 0$ أي : $x = -2$

و منه (C_h) يقطع محور الفواصل في نقطتين $(1;0)$ و $(-2;0)$.

4 إشارة $h(x)$ على المجال $]-\infty;2[$:

من جدول تغيرات الدالة h : $h(1) = h(-2) = 0$

x	$-\infty$		-2		1		2
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖

(II $f(x) = x^2 + 6x - 2 + 8ln(2-x)$ / $x \in]-\infty;2[$.

1 حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+6x-2 =$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 8\ln(2-x) = +\infty$ و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} x^2+6x-2 = 4$ و $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} 8\ln(2-x) = -\infty$ و منه : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = -\infty$

و منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي لـ (C_f).

2 إثبات أن : $f'(x) = 2h(x)$:

من أجل كل $x \in]-\infty;2[$ فإن :

$$f'(x) = 2x+6+\frac{8(-1)}{2-x} = 2\left[x+3-\frac{4}{2-x}\right] = 2\left[1+\frac{(2+x)(2-x)-4}{2-x}\right]$$

$$f'(x) = 2\left(1+\frac{4-x^2-4}{2-x}\right) = 2\left(1-\frac{x^2}{2-x}\right) = 2h(x)$$

و منه نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$ على المجال $]-\infty;2[$.

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(2-) \simeq 1.1$	↗	5	↘	$-\infty$ ‖

$f(-2) = -10+8\ln 4 \simeq 1.1$ و $f(1) = 1+6-2+8\ln 1 = 5$.

3 إيجاد إحداثيات نقطة إنعطاف :

ندرس إشارة $f''(x)$:

من أجل كل $x \in]-\infty;2[$ فإن : $f''(x) = [2h(x)]' = 2h'(x)$

$f''(x) = 0$ معناه : $h'(x) = 0$

x	$-\infty$		0		2
$f''(x) = 2h'(x)$		$+$	0	$-$	‖

بما أن $f''(x)$ إنعدمت عند 0 و غيرت من إشارتها فإن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $(0;f(0))$ حيث :
$f(0) = -2+8\ln 2$ مع $f(0) \simeq 3.55$.

4 معادلة المماس (T) لـ (C_f) :

لدينا : $f(0) = -2+8\ln 2$ و $f'(0) = 2h(0) = 2(1) = 2$.

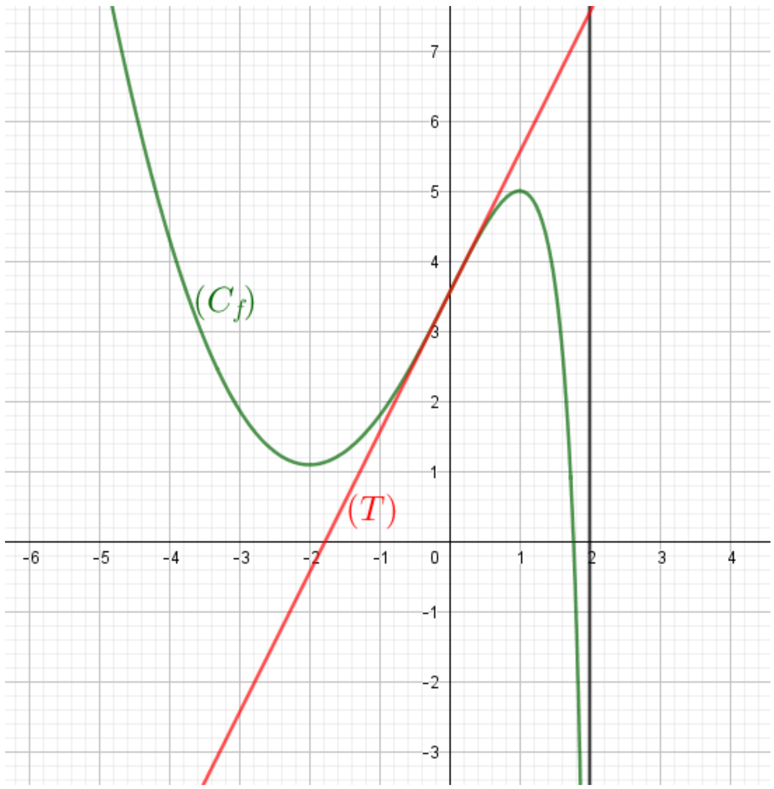
$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه : $(T): y = 2x-2+8\ln 2$

5 إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في المجال $]1.7;1.8[$:

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن : $f(x) > 0$ في المجال $]-\infty;1[$.

أما في المجال $]1;2[$ f مستمرة و متناقصة تماما و هي كذلك في المجال $[1.7;1.8]$
و $f(1.7) = 1.45$ و $f(1.8) = -0.83$
و منه : $f(1.7) \times f(1.8) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $(\alpha;0)$ حيث : $1.7 < \alpha < 1.8$.

6 رسم المماس (T) و المنحنى (C_f):



7 $g(x) = x^2 + 6|x| - 2 + 8ln(2 - |x|)$ / $x \in]-2;2[$.

أ تبيان أن الدالة g زوجية :

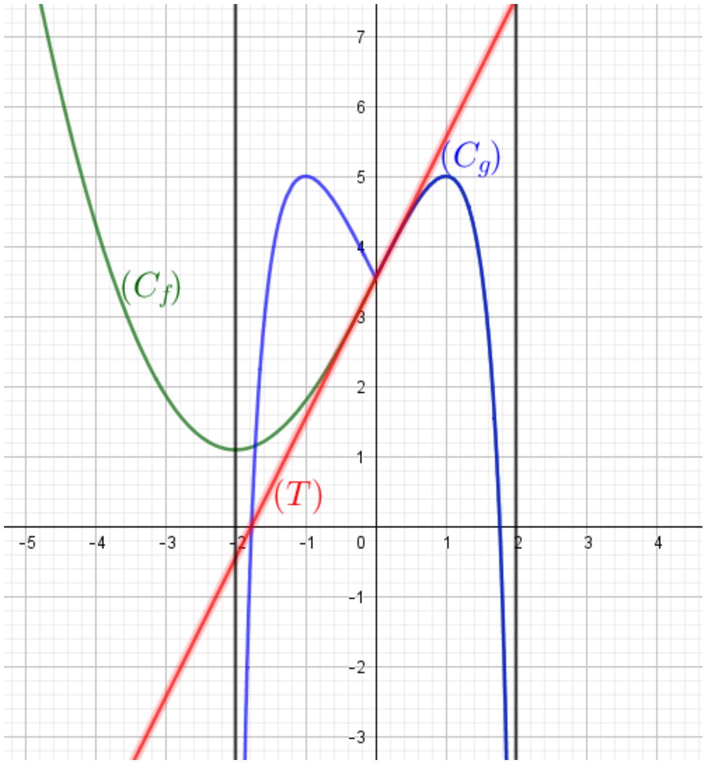
لدينا : $D_g =]-2;2[$ متناظر بالنسبة للصفر .
$g(-x) = (-x)^2 + 6|-x| - 2 + 8ln(2 - |-x|) = x^2 + 6|x| - 2 + 8ln(2 - |x|) = g(x)$.
و منه : الدالة g زوجية على المجال $]-2;2[$ و منه نستنتج أن (C_g) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب .

ب كتابة g دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $\begin{cases} |x| = -x & /x \leqslant 0 \\ |x| = x & /x \geqslant 0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} g(x) = x^2 - 6x - 2 + 8\ln(2+x) & /x \in]-2;0] \\ g(x) = x^2 + 6x - 2 + 8\ln(2-x) & /x \in [0;2[\end{cases}$

ج إنشاء (C_g) :

لدينا : $f(x) = g(x)$ في المجال $[0;2[$ فإن (C_g) ينطبق على (C_f) في هذا المجال
$f(x) = g(x) = g(-x)$ في المجال $]-2;0]$ فإن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.



✍ بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2021 و لا تنسونا من خالص دعائكم