المادة: رياضيات	**اختبار الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2020/2021
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)		المدة: ثلاث ساعات (3سا)
المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"		إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (4نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وأربع كريات سوداء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 2 ، 3 وخمس كريات خضراء تحمل الأرقام 4 ، 4 ، 5 ، 5 ، 5. (لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب من هذا الكيس كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية.

1) A و B حادثتان حيث: A: "سحب كريتين إحداهما سوداء تحمل الرقم 2 والثانية لونها مختلف"، وB: "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما أكبر تماما من 3". بيّن أنّ $P(A)=\frac{4}{11}$ و $P(B)=\frac{19}{22}$ ، ثم استنتج حساب $P(A\cup B)$.

2) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب الرقم الأكبر بين رقمي الكرتين المسحوبتين، والرقم 6 إذا كانت الكريتان تحملان نفس الرقم.

أ) عيّن مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X ، ثم بيّن أنّ: $P(X=4)=\frac{7}{33}$ و $P(X=6)=\frac{1}{6}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

3) نجري الآن n سحبة متتالية لكرية بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة إلى الكيس.

أ) عبّر بدلالة العدد الطبيعي n الاحتمال P_n للحصول على الكريات البيضاء فقط ، ثم عيّن أكبر قيمة للعدد n بحيث يكون $P_n \geq 0{,}002$.

ب) احسب احتمال سحب كرية واحدة فقط بيضاء.

تمرين 2 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=-3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{2u_n+8}-4$.

1) أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $-3\leq u_n<-2$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8}+u_n+4}$. استنتج اتّجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}+2\geq(2-\sqrt{2})(u_n+2)$.

ب) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $0>u_n+2\geq-\left(2-\sqrt{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول v_0 ، ومن أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=\dfrac{1}{2^n}\ln\left(\dfrac{u_n+4}{2}\right)$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، أساسها $q=\frac{1}{4}$ ، يطلب كتابة حدّها العام بدلالة n.

ب) نضع $P_n=(u_0+4)\times(u_1+4)\times\ldots\times(u_n+4)$. بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $P_n=2^{2^{-n}+n-1}$.

تمرين 3 (5نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$. M نقطة لاحقتها العدد المركب z، حيث $z=x+iy$، x و y عددين حقيقيين. نرفق بكل عدد مركب z حيث $z\neq -i$ العدد المركب Z: $Z=\dfrac{iz+5}{z+i}$.

1) بيّن أنّ الكتابة الجبرية للعدد المركب Z هي: $Z=\dfrac{6x}{x^2+(y+1)^2}+i\,\dfrac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$.

2) عيّن وأنشئ المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3) عيّن وأنشئ المجموعة E_2 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، مع ذكر العناصر المميّزة لـ E_2.

4) عيّن وأنشئ المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون طويلة $Z+i$ تساوي 2 بمعنى $|Z+i|=2$.

5) عيّن وأنشئ المجموعة E_4 للنقط M من المستوي بحيث يتحقّق $Z=\overline{z}$.

تمرين 4 (7نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ: $g(x)=x(x-2-e^{-x})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ: $g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$، ادرس إشارتها ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين، أحدهما معدوم والآخر α حيث $2{,}1<\alpha<2{,}2$. استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{e^{-x}+1}{x-1}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$. فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{1\}$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$. استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب) ليكن (T) المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة β. بيّن أنّ المماس (T) يشمل النقطة A حيث $\mathrm{A}(1,0)$ إذا تحقّق: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$. استنتج أنّ معادلة المماس (T) هي: $y=\dfrac{3+e}{4}(x-1)$.

3) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha+1$، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $f(-2)$، ثم ارسم المستقيم المقارب (Δ)، المماس (T) والمنحني $(\mathscr{C})$.

4) m وسيط حقيقي، ولتكن f_m الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f_m(x)=x+\dfrac{e^{-x}+m}{x-1}$ و $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني.

أ) p و q عددين حقيقيين موجبين تماما حيث $p<q$. أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C}_p)$ و $(\mathscr{C}_q)$.

ب) عيّن قيمة العدد الحقيقي m حتى تكون الدالة f_m هي حل للمعادلة التفاضلية: $(x-1)y'+x(y-1)=x^2$.

تصحيح اختبار الفصل الأول 2021م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $P(A) = \frac{C_3^1 \times C_8^1}{C_{12}^2} = \frac{4}{11}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_2^1 C_4^1 + C_2^2}{C_{12}^2} = 1 - \frac{3}{22} = \frac{19}{22}$

أو $P(B) = \frac{C_{10}^2 + C_2^1 \times C_{10}^1}{C_{12}^2}$ (أعسر)

2) أ) $X = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X=4) = \frac{C_2^1 \times C_7^1}{C_{12}^2} = \frac{7}{33}$

$P(X=6) = \frac{C_2^2 + C_4^2 + C_2^2 + C_3^2}{66} = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{C_3^1 \times C_6^1}{66} = \frac{21}{22}$

أو: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{3}{66}$

ب) قانون الاحتمال للمتغير X:

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{7}{33}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = 2 \times \frac{4}{33} + \frac{3}{11} + 4 \times \frac{7}{33} + 5 \times \frac{9}{22} + \frac{6}{6} = \frac{97}{22} = 4{,}409$

3) أ) $P_n = \frac{3^n}{12^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$P_n \geq 0{,}002$ يعني: $\frac{1}{4^n} \geq 0{,}002$ ، أي $4^n \leq 500$

$\ln 4^n \leq \ln 500$ ، $n \leq \frac{\ln 500}{\ln 4}$ ، $n \leq 4{,}48$

ومنه: $n = 4$

ب) $P = n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أو: $P = n\left(\frac{1^1 \times 3^{n-1}}{12^n}\right) = n\left(\frac{3^{n-1}}{4^n}\right)$

تمرين 2:

1) أ) $n=0$: $u_0 = -3$ ومنه $-3 \leq u_0 < -2$ (محققة)

نفرض أن: $-3 \leq u_n < -2$ ونبرهن صحة: $-3 \leq u_{n+1} < -2$

لدينا: $-3 \leq u_n < -2$ ، $-6 \leq 2u_n < -4$ ،

$2 \leq 2u_n + 8 < 4$ ؛ $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$

$\sqrt{2} - 4 \leq \sqrt{2u_n+8} - 4 < -2$ و $-3 \leq \sqrt{2} - 4$

ومنه: $-3 \leq u_{n+1} < -2$ إذن: $-3 \leq u_n < -2 : \forall n \in \mathbb{N}$

ب) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 4 - u_n)(\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 8 - (4+u_n)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} = \frac{2(u_n+4) - (u_n+4)^2}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n+2)(u_n+4)}{\sqrt{2u_n+8} + 4 + u_n} > 0$

لأن: $-3 \leq u_n < -2$ ومنه: $1 \leq u_n + 4 < 2$ (موجب)

و: $-1 \leq u_n + 2 < 0$ (سالب)

إذن (u_n) متزايدة تماما.

u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

2) أ) لدينا: $u_{n+1} + 2 = \sqrt{2u_n+8} - 2 = \frac{(\sqrt{2u_n+8} - 2)(\sqrt{2u_n+8} + 2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

$u_{n+1} + 2 = \frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2}$

إذن: $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$ تكافئ:

$\frac{2(u_n+2)}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$ $\quad u_n + 2 < 0$

أي: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$

لدينا سابقا: $\sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} < 2$ ومنه:

$2 + \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n+8} + 2 < 4$ وعند استعمال المقلوب ثم نضرب في 2.

$\frac{1}{2} < \frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq \frac{2}{2+\sqrt{2}}$

لدينا: $\frac{2}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2}$

ومنه: $\frac{2}{\sqrt{2u_n+8} + 2} \leq 2 - \sqrt{2}$ أي $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ب) $n=0$: $0 > u_0 + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^0$ أي $0 > -1 \geq -1$ (محققة)

نفرض أن: $0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

ونبرهن صحة: $0 > u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$

لدينا: $(2-\sqrt{2}) \times \left[0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n\right]$

$0 > (2-\sqrt{2})(u_n+2) \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$

وبما أن: $u_{n+1} + 2 \geq (2-\sqrt{2})(u_n+2)$

ومنه: $0 > u_{n+1} + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^{n+1}$.

إذن: $\forall n \in \mathbb{N} : 0 > u_n + 2 \geq -(2-\sqrt{2})^n$

لدينا: $-1 < 2 - \sqrt{2} < 1$ ومنه: $\lim_{n \to +\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0$

باستعمال مبرهنة الحصر: $\lim_{n \to +\infty} (u_n + 2) = 0$

ومنه: $\lim_{n \to +\infty} u_n = -2$

3) أ) $v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_{n+1}+4}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{2u_n+8}}{2}\right)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2 \times 2^n} \ln\left(\frac{2u_n+8}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = \frac{1}{4} v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و $v_0 = -\ln 2$

$v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{4}\right)^n$

ب) $\ln\left(\frac{u_n+4}{2}\right) = 2^n v_n$ ومنه: $(u_n + 4) = 2e^{2^n \cdot v_n}$

$(u_n + 4) = 2e^{2^n \cdot \left(\frac{-\ln 2}{4^n}\right)} = 2\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}}$

$P_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0}} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^1}} \times \cdots \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^n}} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n}}$

$$P_n = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)} = 2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2^{-n}} = 2^{n-1+2^{-n}}$$

تمرين 3:

1) $Z = \frac{iz+5}{z+i} = \frac{i(x+iy)+5}{x+iy+i} = \frac{-y+5+ix}{x+i(y+1)}$

$$Z = \frac{(-y+5+ix)(x-i(y+1))}{(x+i(y+1))(x-i(y+1))} = \frac{6x}{x^2+(y+1)^2} + i\,\frac{x^2+y^2-4y-5}{x^2+(y+1)^2}$$

2) Z تخيليا صرفا إذا كان: $6x=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

ومنه E_1 مستقيم معادلته $x=0$ ماعدا $(0;-1)$

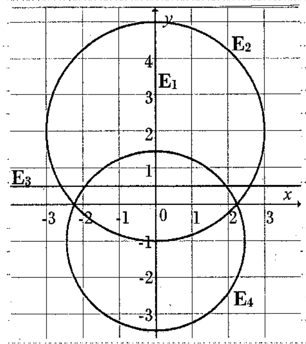
3) Z حقيقيا لما: $x^2+y^2-4y-5=0$ مع $(x;y)\neq(0;-1)$

$(x-0)^2+(y-2)^2=9$. ومنه E_2 دائرة مركزها $\Omega(0,2)$

ونصف قطرها $r=3$ باستثناء النقطة $(0;-1)$.

4) $|Z+i| = \left|\frac{iz+5}{z+i}+i\right| = \left|\frac{2iz+4}{z+i}\right| = 2\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|$

إذن: $|Z+i|=2$ لما: $\left|\frac{iz+2}{z+i}\right|=1$ أي: $|iz+2|=|z+i|$



$|-y+2+ix| = |x+i(y+1)|$

$(-y+2)^2+x^2 = x^2+(y+1)^2$

ومنه: $6y=3$. E_3 مستقيم معادلته $y=\frac{1}{2}$.

5) $Z=\bar{z}$ أي: $\frac{iz+5}{z+i}=\bar{z}$

$z\cdot\bar{z}+i(\bar{z}-z)-5=0$

$(x-0)^2+(y+1)^2=6$

E_4 دائرة مركزها $\Omega'(0;-1)$ ونصف قطرها $r'=\sqrt{6}$.

تمرين 4:

I-1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x(x-2-e^{-x})\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x(x-2-e^{-x})\right] = +\infty$

2) $g'(x) = (x-2-e^{-x}) + (1+e^{-x})x = 2x-2+e^{-x}(x-1)$

$g'(x)=(x-1)(e^{-x}+2)$. إشارتها من إشارة $(x-1)$ لأن $(e^{-x}+2)>0$

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$			0		
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0	$1-\frac{1}{e}$	↗ 0	$+\infty$

3) $g(0)=0$ ولدينا g مستمرة ومتزايدة، $g(2,2)\simeq 0,2>0$ ، $g(2,1)\simeq -0,05<0$. حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2,1<\alpha<2,2$.

إشارة $g(x)$: $+$ 0 $-$ α $+$

II 1) أ) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=-\infty$

(ح) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}+1}{x-1}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+\frac{x\left(-\frac{e^{-x}}{-x}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]=-\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-1}{x-1}=0$

(ح) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ عند $+\infty$

2) أ) $f'(x) = 1+\frac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}-1}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-xe^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

f متزايدة تماما على: $x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[$

f متناقصة تماما على: $x\in]0;1[\cup]1;\alpha[$.

x	$-\infty$	0	1		α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-2 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

ب) $y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$ ؛ يشمل $A(1,0)$

$$0=\frac{\beta^2-2\beta-\beta e^{-\beta}}{(\beta-1)^2}(1-\beta)+\beta+\frac{e^{-\beta}+1}{\beta-1}$$

$$\frac{-\beta^2+2\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}+\beta=0$$

$\frac{\beta+\beta e^{-\beta}+e^{-\beta}+1}{\beta-1}=0$ ومنه: $(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$

$(\beta+1)(e^{-\beta}+1)=0$ إذا كان $\beta=-1$ لأن $e^{-\beta}+1>0$ ومنه:

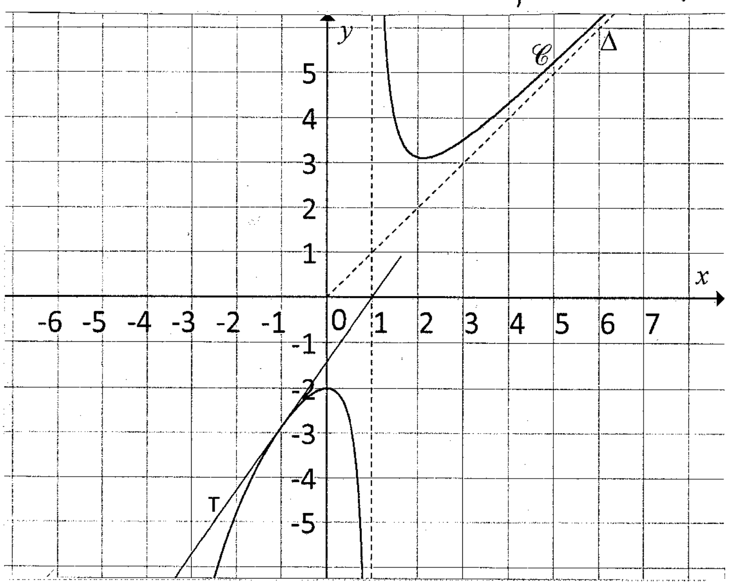
$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=\frac{3+e}{4}(x+1)-\frac{3+e}{2}=\frac{3+e}{4}(x-1)$

3) أ) لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه: $e^{-\alpha}=\alpha-2$ ولدينا: $f(\alpha)=\alpha+\frac{e^{-\alpha}+1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\alpha+\frac{\alpha-2+1}{\alpha-1}=\alpha+1$$

$2,1<\alpha<2,2$ ؛ $3,1<\alpha+1<3,2$ ومنه $3,1<f(\alpha)<3,2$

ب) $f(-2)\simeq-4,8$



4) أ) $f_p(x)-f_q(x)=x+\frac{e^{-x}+p}{x-1}-x-\frac{e^{-x}+q}{x-1}$

$$f_p(x)-f_q(x)=\frac{p-q}{x-1}$$

لما $p<q$ ومنه $(p-q)<0$.

لما $x<1$: (C_p) أعلى (C_q) ولما $x>1$: (C_p) أسفل (C_q)

ب) $(x-1)f'_m(x)+x\left(f_m(x)-1\right)=x^2$

$$(x-1)\left(1+\frac{-xe^{-x}-m}{(x-1)^2}\right)+x\left(x-1+\frac{e^{-x}+m}{x-1}\right)=x^2$$

$$x-1+\frac{-xe^{-x}-m}{x-1}-x+\frac{xe^{-x}+mx}{x-1}=0$$

$$-1+\frac{m(x-1)}{x-1}=0$$

$m-1=0$ ومنه $m=1$

"عبد المطلب"