

## التمرين الأول: [10 نقاط]

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = e^x + x - 2$$

- 1 [01 ن] ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 2 [0.5 ن] بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$  حيث:  $0.4 < \alpha < 0.5$

- 3 [0.5 ن] استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = \frac{x - 3}{1 + e^{-x}}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- 1 [1.5 ن] احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  وفسر النتيجة هندسيا

2

- أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ، لدينا:

$$f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

- ب/ استنتج تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3

- أ/ بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 3$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

- ب/ ادرس الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$

- 4 [01 ن] أثبت أن  $f(\alpha) = a - 2$ ، ثم استنتج حصرا لـ  $f(\alpha)$

5

- أ/ أوجد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامي محوري الاحداثيات

- ب/ مثل بيانيا كلا من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$

- 6 [01 ن] ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$f(x) = m$$

(I) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:

$$g(x) = x \ln x - x - 1$$

- 01 ن] 1 ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم شكل جدول تغيراتها
- 0.5 ن] 2 بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $]0; +\infty[$  حيث:  $3.5 < \alpha < 3.6$
- 0.5 ن] 3 استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x + 1}$$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$

- 01 ن] 1 احسب نهايات الدالة  $f$ ، ثم فسر النتائج المحصل عليها هندسيا
- 2

02 ن] أ/ بيّن أن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$

01 ن] ب/ استنتج تغيرات الدالة  $f$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

01 ن] 3 اكتب معادلة المماس  $(T)$  لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1

01 ن] 4 مثل بيانيا كلا من  $(T)$  و  $(C_f)$ ، (نأخذ  $f(\alpha) \approx 0.7$ )

(III) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{x}$$

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق

- 01 ن] 1 تحقق أن  $h(x) + 1 = f(x - 1)$
- 01 ن] 2 استنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بواسطة تحويل نقطي يطلب تعيينه

✓ إنتهى |

اعلم أن مسافة الألف ميل تبدأ بخطوة

وتذكّر أن الوقت المتبقي لموعد بكالوريا 2022 هو:

199 يوم فقط



## حل التمرين الأول:

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

• النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

• دراسة  $g'(x)$ :

$$g'(x) = e^x + 1 > 0$$

• جدول تغيرات الدالة  $g$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $\mathbb{R}$ :لدينا الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة على  $\mathbb{R}$ ولدينا:  $g(0.5) \times g(0.4) < 0$ لأن:  $g(0.4) \approx -0.1$  و  $g(0.5) \approx 0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]0.4; 0.5[$ 3 استنتاج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $\mathbb{R}$ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1

/أ تبين أنه  $f(x) = \frac{e^x(x-3)}{1+e^x}$ 

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-3}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{e^{-x}(xe^x - 3e^x)}{e^{-x}(e^x + 1)} \\ &= \frac{xe^x - 3e^x}{e^x + 1} \\ &= \frac{e^x(x-3)}{e^x + 1} \end{aligned}$$

/ب حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

/ج تبين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x(x-3)}{e^x + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{xe^x - 3e^x}{e^x + 1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0 \text{ لأن}$$

•  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  معادلته:  $y = 0$ 

2

/أ تبين أنه  $f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ 

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + e^{-x} - (-e^{-x})(x-3)}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-x} + xe^{-x} - 3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 + e^{-x} + xe^{-x} - 3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{1 - 2e^{-x} + xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x - 2 + x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{g(x)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

/ب استنتاج تغيرات الدالة  $f$ :لدينا:  $e^{-x} > 0$  و  $(1+e^{-x})^2 > 0$ ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ 

ومنه:

• جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(\alpha)$	$+\infty$

3

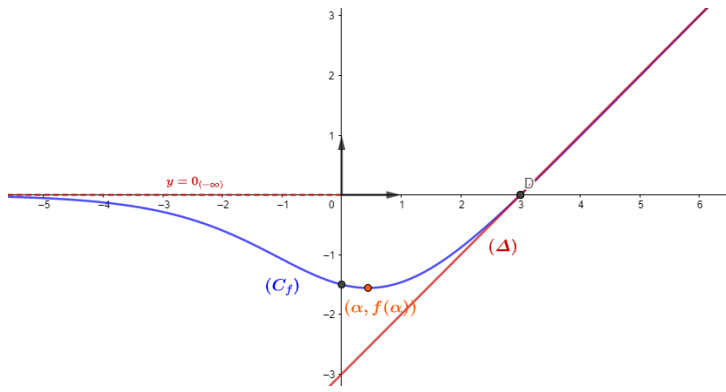
/أ تبين أن  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_{(\Delta)}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x-3}{1+e^{-x}} - x + 3 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x-3 - x - xe^{-x} + 3 + 3e^{-x}}{1+e^{-x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-xe^{-x} + 3e^{-x}}{1+e^{-x}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ /ب دراسة الوضع النسبي بين  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) - y_{(\Delta)} = 0 &\Rightarrow \frac{-xe^{-x} + 3e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0 \\ &\Rightarrow -xe^{-x} + 3e^{-x} = 0 \end{aligned}$$



6 المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة  $f(x) = m$

لما  $m < f(\alpha)$  المعادلة لا تقبل حلول

لما  $m = f(\alpha)$  المعادلة تقبل حل مضاعف موجب تماما

لما  $f(\alpha) < m < f(0)$  المعادلة تقبل حلين موجبين تماما

لما  $m = f(0)$  المعادلة تقبل حل معدوم وحل موجب تماما

لما  $f(0) < m < 0$  المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

لما  $m \geq 0$  المعادلة تقبل حلا موجبا تماما

$$\Rightarrow e^{-x}(3-x) = 0$$

لدينا:  $e^{-x} \neq 0$

ومنه:  $3-x = 0$

إذن:  $x = 3$

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

•  $x \in ]-\infty; 3[$  لما  $(\Delta)$  فوق  $(C_f)$

•  $x = 3$  لما  $(\Delta)$  يقطع  $(C_f)$

•  $x \in ]3; +\infty[$  لما  $(\Delta)$  تحت  $(C_f)$

4 اثبات أن  $f(\alpha) = a - 2$

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha - 2 + \alpha = 0$$

$$\Rightarrow e^\alpha = 2 - \alpha$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha(\alpha - 3)}{e^\alpha + 1} \\ &= \frac{(2 - \alpha)(\alpha - 3)}{2 - \alpha + 1} \\ &= \frac{(2 - \alpha)(\alpha - 3)}{-(\alpha - 3)} \\ &= -(2 - \alpha) \\ &= \alpha - 2 \end{aligned}$$

- استنتاج حصرا لـ  $f(\alpha)$

لدينا:

$$0.4 < \alpha < 0.5$$

ومنه:

$$-1.6 < \alpha - 2 < -1.5$$

إذن:

$$-1.6 < f(\alpha) < -1.5$$

5

أ/ إيجاد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محوري الاحداثيات:

- مع حامل محول الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{1+e^{-x}} = 0$$

$$\Rightarrow x-3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

إذن:  $(C_f) \cap (xx') = \{3\}$

- مع حامل محور الترتيب:

$$f(0) = \frac{0-3}{1+e^{-0}} = -\frac{3}{2}$$

إذن:  $(C_f) \cap (yy') = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

ب/ التمثيل البياني لكلا من  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ :

## حل التمرين الثاني:

(I)

1 دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \left( \ln x - 1 - \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x \ln x}{0} - x - 1 \right] = -1$$

- المشتقة:

$$g'(x) = \ln x + \frac{1}{x} x - 1 = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول التغيرات:

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-1	-2	$+\infty$

2 تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ :

لدينا الدالة مستمرة ورتيبة على المجال  $[3.5; 3.6]$

ولدينا:  $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل

حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $[3.5; 3.6]$

3 استنتاج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$ :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 حساب نهايات الدالة  $f$ :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\frac{0}{\ln x}}{1 + \frac{1}{x}} \right) = 1$$

ومنه  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار  $+\infty$  معدلته  $y = 1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار  $+\infty$  معدلته  $x = 0$

2

أ/ تبين أن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ :

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x+1-x \ln x}{x} \\ &= -\frac{x}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x-1+x \ln x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج تغيرات الدالة  $f$ :

لدينا:  $x(x+1)^2 > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$

ومنه إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$

- جدول التغيرات:

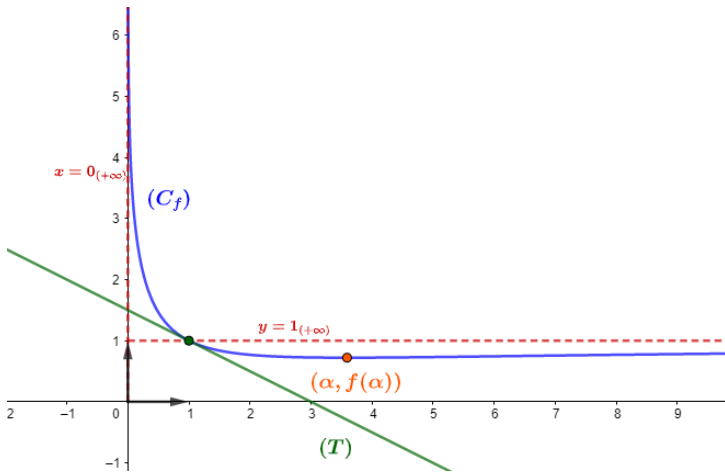
$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	1

3 اكتب معادلة المماس  $(T)$ :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

4 التمثيل البياني:



(III)

1 التحقق أن  $h(x) + 1 = f(x-1)$

$$h(x) + 1 = 1 - \frac{\ln(x-1)}{x} = f(x-1)$$

2 استنتاج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$ :

$$\text{لدينا: } h(x) + 1 = f(x-1)$$

$$\text{ومنه: } h(x) = f(x-1) - 1$$

إذن:  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بإنسحاب شعاعه  $\vec{u}$  حيث:  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$