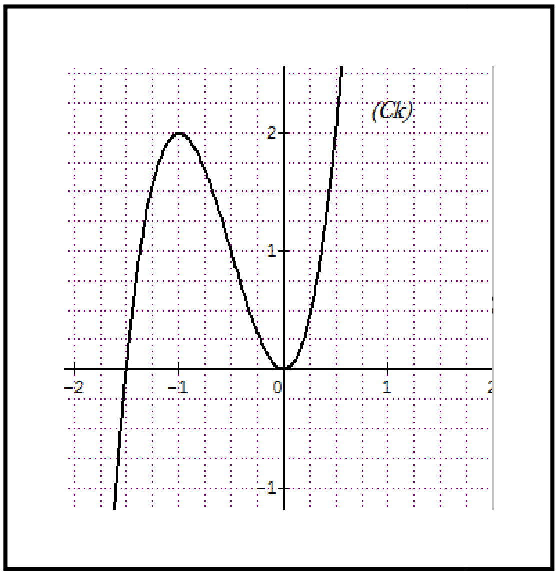
ثانوية السعيد عبد الحي 2016/2015

سنة ثالثة علوم تجريبية المدة: ساعتين

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول (06 نقاط):



✓ k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني المقابل :

بقراءة بيانية اجب على مايلي:

1. شكل جدول تغيرات الدالة k
2. حدد إشارة $k(x)$ على مجال تعريفها

✓ نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$ بـ:

$$h(x) = ln[k(x)]$$

1. احسب نهايات الدالة h عند أطراف مجال تعريفها
2. ادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج جدول تغيراتها

✓ لتكن الدالة F المعرفة على $\left]\frac{1}{2}\ ,\ 2\right[\cup \left]2\ ,+\infty\right[$ بـ : $F(x) = h(x-2) - 2$

1. اشرح كيفية إنشاء (C_F) المنحنى البياني لـ $F(x)$ انطلاقا من (C_h) التمثيل البياني للدالة h
2. ارسم (C_h) و (C_F) في نفس المعلم

التمرين الثاني (14 نقطة):

I) g دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $g(x) = (a-2x)e^{x+1} + b$ حيث: $(a,b) \in R^2$

(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) عين العددان الحقيقيان a و b حتى يتحقق الشرطان معا :

✓ g هي حل للمعادلة التفاضلية : $(E):\ y' - y = -2e^{x+1} - 2$

✓ المنحنى (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 1 عند النقطة التي فاصلتها $(x = -1)$

2) إذا اعتبرنا أن: $a = 1$ و $b = 2$

أ. اكتب عبارة $g(x)$ ثم ادرس تغيراتها

ب. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]0.68, 0.69[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) نعتبر الدالة f دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $f(x) = 1 + \frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$

نسمي (C_f) منحناها البياني في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) أ احسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f ثم بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$$

ب استنتج إشارة الدالة f' على R

2) بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 1$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

3) أ/ تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (4x-3) = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$

ب/ احسب : $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (4x-3)]$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - 1]$ وماذا تستنتج؟

4) ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي $y = 4x - 3$ معادلة له

5) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (C_f) و (Δ) والمستقيم الذي معادلته $y = 1$

III) لتكن الدالة h دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $h(x) = 1 + \frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}$

1) بين أن الدالة h دالة زوجية

2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم ارسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h في نفس المعلم السابق

3) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$4|x| + 2 = (-1-m)(1+e^{|x|+1})$$

عندما تستبدل نظرتك السلبية بأخرى ايجابية

ستبدأ في الحصول على نتائج ايجابية

الإجابة النموذجية لاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول:

1 جدول تغيرات الدالة k

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	0	+	
$k(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

2 إشارة $k(x)$ على مجال تعريفها:

x	$-\infty$		$-3/2$		0		$+\infty$
$k(x)$		-	0	+	0	+	

✓ نعتبر الدالة h المعرفة على $\left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$ بـ : $h(x) = \ln[k(x)]$

1 نهايات الدالة h عند أطراف مجال تعريفها

* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{|x|\to 0} h(x) = \lim\limits_{|x|\to 0} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to -3/2} h(x) = \lim\limits_{x\to -3/2} \ln[k(x)] = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

2 دراسة اتجاه تغير الدالة h واستنتاج جدول تغيراتها :

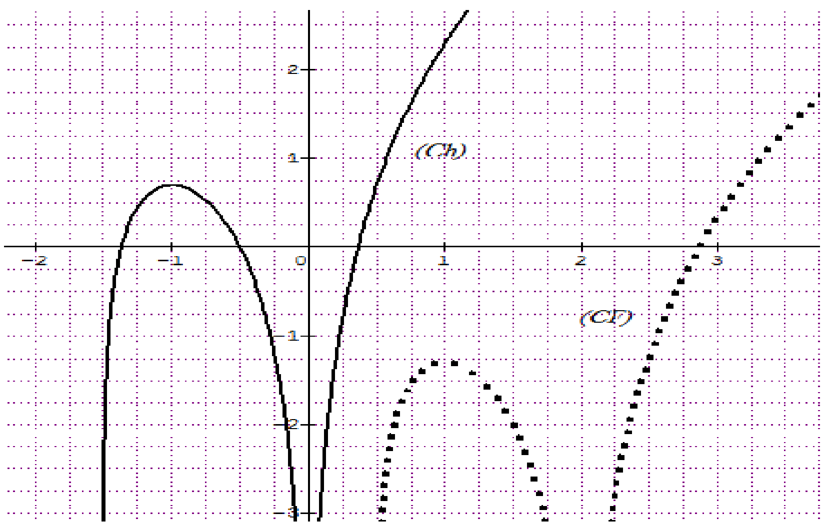
- نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها: لدينا من اجل كل $x \in \left]-\frac{3}{2}\ ,\ 0\right[\cup \left]0\ ,+\infty\right[$: $h'(x) = \frac{k'(x)}{k(x)}$ إذن:

x	$-3/2$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	-	‖	+	
$k(x)$		+		+	‖	+	
$h'(x)$		+		-	‖	+	

- جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	‖	+	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 2$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3 المنحنى البياني (C_h) :



✓ لتكن الدالة F المعرفة على $]\frac{1}{2}\ ,\ 2[\cup]2\ ,+\infty[$ بـ: $F(x)=h(x-2)-2$

1- يتم إنشاء (C_F) المنحنى البياني لـ $F(x)$: بانسحاب (C_h) بيان الدالة h بشعاع قدره : $\vec{v}\binom{2}{-2}$

التمرين الثاني:

I) g دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $g(x)=(a-2x)e^{x+1}+b$

1- عين العددان الحقيقيان a و b: لدينا g هي حل للمعادلة التفاضلية (E): يعني أن : $g'(x)-g(x)=-2e^{x+1}-2$

أي: $-2e^{x+1}+(a-2x)e^{x+1}-[(a-2x)e^{x+1}+b]=-2e^{x+1}-2$

ومنه $-2e^{x+1}-b=-2e^{x+1}-2$ و بالمطابقة نجد: $b=2$

ولدينا: المنحنى (C_g) يقبل مماس معامل توجيهه 1 عند النقطة التي فاصلتها $(x=-1)$: يعني أن: $g'(-1)=1$

حيث : $g'(x)=-2e^{x+1}+(a-2x)e^{x+1}=(a-2-2x)e^{x+1}$ ومنه : $(a-2-2(-1))e^{-1+1}=1$

إذن: $a=1$ وبالتالي: $g(x)=(1-2x)e^{x+1}+2$

1- أ دراسة اتجاه تغير الدالة g : g دالة معرفة على $\mathcal{R}$ بـ : $g(x)=(1-2x)e^{x+1}+2$

- نحسب نهايات الدالة g:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((1-2x)e^{x+1}+2\right)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((1-2x)e^{x+1}+2\right)=-\infty$$

- نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها:

$$g'(x)=(-1-2x)e^{x+1}$$

لدينا من اجل كل $x\in\mathcal{R}$ $g'(x)=0$ إذا كان : $(-1-2x)=0$ أي $x=-\frac{1}{2}$

ومنه:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	

اذن:

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	2	↗	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	↘	$-\infty$

ب اثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا بحيث $\alpha\in]0.68\ ,\ 0.69[$:

- الدالة g دالة معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على $\left]-\frac{1}{2}\ ,+\infty\right[$ ادن فهي حتما معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0.68\ ,\ 0.69]$

- ولدينا $\begin{cases}g(0.68)=0.0683\\g(0.69)=-0.0594\end{cases}$ أي $g(0.68)\times g(0.69)<0$

- ادن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن العادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا حيث $\alpha\in]0.68\ ,\ 0.69[$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathcal{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

II) نعتبر الدالة f دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $f(x)=1+\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}$

1) أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$:

$$f'(x)=\frac{4(1+e^{x+1})-e^{x+1}(4x+2)}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{4+4e^{x+1}-4xe^{x+1}-2e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{2e^{x+1}-4xe^{x+1}+4}{(1+e^{x+1})^2}=\frac{2g(x)}{(1+e^{x+1})^2}$$

ب استنتاج إشارة الدالة f' على R :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

(2 بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 1$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

لدينا $f(\alpha) = 1 + \frac{4\alpha+2}{1+e^{\alpha+1}} \dots\dots\dots (1)$

ولدينا : $g(\alpha) = (1-2\alpha)e^{\alpha+1} + 2 = 0$ إذن : $e^{\alpha+1} = \frac{-2}{(1-2\alpha)} \dots\dots\dots (2)$

بالتعويض (2) في (1) نجد $(1) \dots\dots\dots$ $f(\alpha) = 1 + \frac{4\alpha+2}{1+\frac{-2}{(1-2\alpha)}}$ و بعد توحيد المقامات والتبسيط نجد : $f(\alpha) = \frac{8\alpha^2+2\alpha-1}{1+2\alpha}$

وباستعمال القسمة الاقليدية نجد: $f(\alpha) = \frac{(1+2\alpha)(4\alpha-1)}{(1+2\alpha)}$ ومنه $\boxed{f(\alpha) = 4\alpha - 1}$

- حصر $f(\alpha)$: لدينا $0.68 \le \alpha \le 0.69$

بضرب طرفي المتباينة في العدد (4) نجد : $4(0.68) \le 4\alpha \le 4(0.69)$

بإضافة العدد (-1) إلى الطرفين نجد : $4(0.68) - 1 \le 4\alpha - 1 \le 4(0.69) - 1$

ومنه نستنتج أن: $\boxed{1.72 \le f(\alpha) \le 1.76}$

(3 أ/ التحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - (4x+3) = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$

$$f(x) - (4x+3) = \frac{4x+2}{1+e^{x+1}} - 4x - 2 = \frac{4x+2-4x-4xe^{x+1}-2-2e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = \frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}$$

ب/ حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (4x+3)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 1]$ ثم تفسير النتائج هندسيا:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (4x+3)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{-2e^{x+1}-4xe^{x+1}}{1+e^{x+1}}\right] = 0$

ومنه نستنتج أن $y = 4x+3$ هي معادلة لمستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - 1] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{4+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{e^{x+1}}{x}}\right] = 0$

ومنه نستنتج أن $y = 1$ هي معادلة لمستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(4 ادرس وضعية المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = 4x+3$

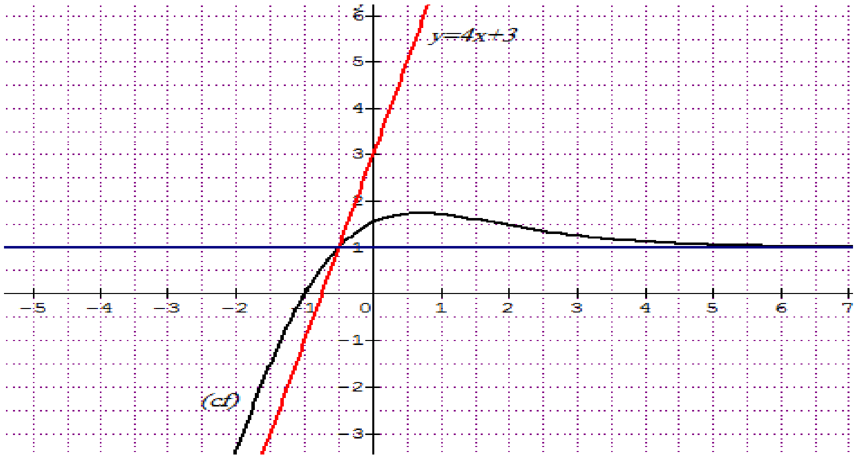
نحل المعادلة : $f(x) - (4x+3) = 0$ أي $\frac{(-2-4x)e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = 0$ ويتحقق ذلك إذا كان $(-2-4x) = 0$ أي $x = -\frac{1}{2}$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$	(C_f) تحت (Δ)

(5 شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	1

(6 ارسم المستقيمات المقاربة والمنحنى البياني (C_f) :



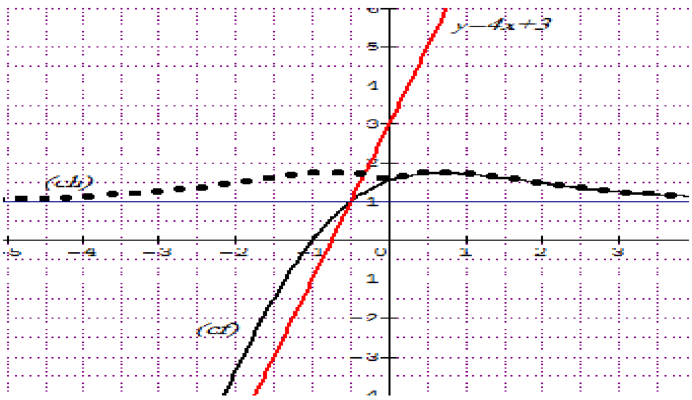
III) لتكن الدالة h دالة معرفة على R بالعبارة التالية : $h(x)=1+\frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}$

1) إثبات أن الدالة h دالة زوجية :

$h(-x)=1+\frac{4|-x|+2}{1+e^{|-x|+1}}=1+\frac{4|x|+2}{1+e^{|x|+1}}=h(x)$ لان : $|-x|=|x|$ ومنه $h(x)$ دالة زوجية

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة ثم رسم (C_h) التمثيل البياني للدالة h في نفس المعلم السابق :

$$h(x)=\begin{cases}1+\frac{4x+2}{1+e^{x+1}}=f(x) & , \quad x\geq 0\\ 1+\frac{2-4x}{1+e^{1-x}}=f(-x) & , \quad x<0\end{cases}$$



3) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $e^{|x|+1}+4|x|+2=-m(1+e^{|x|+1})-1$:

لدينا: $e^{|x|+1}+4|x|+2=-m(1+e^{|x|+1})-1$

أي : $4|x|+2=-m(1+e^{|x|+1})-1-e^{|x|+1}$ ومنه $4|x|+2=-m(1+e^{|x|+1})-(1+e^{|x|+1})$

وبقسمة الطرفين على $(1+e^{|x|+1})$ نجد : $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})}=-m-1$ أي: $\frac{4|x|+2}{(1+e^{|x|+1})}+1=-m$

وبالتالي المعادلة تصبح: $h(x)=-m$

المناقشة

- $m\in]-\infty,-f(\alpha)[$ المعادلة $h(x)=-m$ لا تقبل حل
- $m=-f(\alpha)$ المعادلة $h(x)=-m$ تقبل حلين مضاعفين احدهما موجب α والآخر سالب $-\alpha$
- $m\in]-f(\alpha),-f(0)[$ المعادلة $h(x)=-m$ تقبل أربعة حلول حلين موجبين وحلين سالبين
- $m=-f(0)$ المعادلة $h(x)=-m$ تقبل ثلاثة حلول حل معدوم وحل موجب وآخر سالب
- $m\in]-f(0),-1[$ المعادلة $h(x)=-m$ تقبل حلين احدهما موجب والآخر سالب
- $m\in[-1,+\infty[$ المعادلة $h(x)=-m$ لا تقبل حل