



المستوى الثالثة ثانوي شعبة رياضيات

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

سا2

التمرين الأول : (4.5 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير بدقة:

1. المتتالية (v_n) هندسية حدودها موجبة تماما، حيث: $v_0 \times v_2 = 576$ و $v_0 + v_1 = 30$.

$$v_{n+1} - v_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \log^2(x) + 2 \log(x) - 3$. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي:

$$S = [10^{-3}; 10]$$

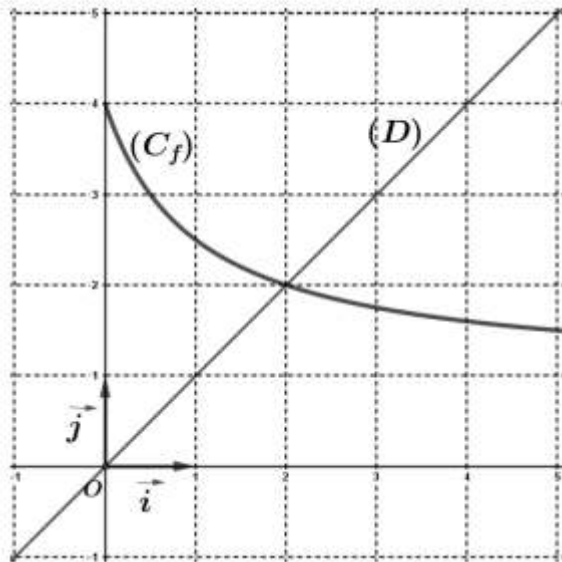
3. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $-y' + \ln(2^y) - 2 = 0$ هو الدالة g بحيث:

$$g(0) = 2024 + \frac{2}{\ln 2} \text{ المعرفة بـ: } g(x) = 2023e^{2x} + \frac{2}{\ln 2}$$

التمرين الثاني : (5.5 نقاط)1) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامدوالمجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ ، (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ:

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n,$$

(أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى (دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{u_{n-2}}{u_{n+2}}$ 

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ - يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب) عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = -2 + \frac{4}{1 + (-\frac{1}{3})^n}$

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{1}{u_{0+2}} + \frac{1}{u_{1+2}} + \dots + \frac{1}{u_{n+2}}$

احسب S_n بدلالة n ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = \frac{1}{16} \left[4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right]$

التمرين الثالث: (10 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ، ثم استنتج أن f معرفة على \mathbb{R}

2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

ب- استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$

د- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) \leq x$ ، مفسراً النتيجة بيانياً

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -\frac{\sqrt{e^x}[(\sqrt{e^x}-2)^2-2]}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما

6) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f)

7) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

(1) خطأ : $v_{n+1} - v_n = 18 \times 4^n$

(2) صحيح : $S = [10^{-3} ; 10]$

(3) خطأ : $g(x) = 2024 \times 2^x + \frac{2}{\ln 2}$

التمرين الثاني :

(1) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى على محور الفواصل

ب- التخمين: المتتالية (u_n) ليست رتيبة ومتقاربة

(2) أ- $v_0 = -1$ و $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$

ب- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ، $u_n = -2 + \frac{4}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

ج- $\lim(u_n) = 2$ لأن $\lim\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

(3) $T_n = \frac{1}{4}[n + 1 - S_n]$ ، $S_n = -\frac{3}{4}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

ومنه $T_n = \frac{1}{16}\left[4n + 7 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

التمرين الثالث :

(1) من أجل كل x من \mathbb{R} لدينا: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^x - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$

بما أن $(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0$ من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $D_f = \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$y = \ln(2)$ يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل عند $+\infty$ معادلته (C_f) ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln(2)$

(3) أ- من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ج- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$

د- من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) - y = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - x$

ومنه: $f(x) - y = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - \ln(e^x)$

ومنه: $f(x) - y = \ln\left(\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}\right)$ بما أن $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq e^x$ فإن $\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x} \leq 1$ ومنه

$$\ln\left(\frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}\right) \leq 0$$

أي $f(x) \leq x$

(C_f) يقع أسفل (Δ) على المجال $[0; +\infty[$

(4) أ- من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$

ب- إشارة $f'(x)$ من إشارة $(\sqrt{e^x} - 1)$ لأن $\sqrt{e^x} > 0$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$

على المجال $]-\infty; 0]$ ، $f'(x) < 0$

على المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

الدالة f تقبل قيمة حدية محلية صغرى من أجل $x = 0$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f

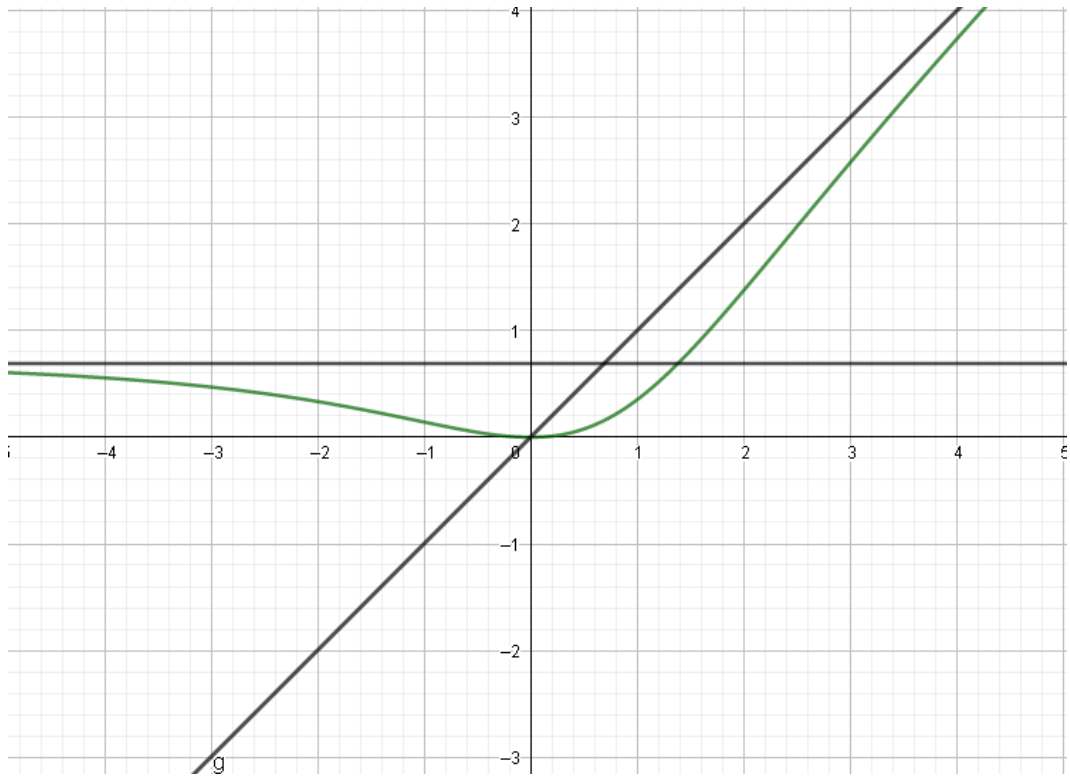
(5) أ- من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -\frac{\sqrt{e^x}[(\sqrt{e^x}-2)^2-2]}{2(e^x-2\sqrt{e^x}+2)^2}$

$f''(x)$ تنعدم عند القيمتين $x_1 = 2\ln(2 + \sqrt{2})$ و $x_2 = 2\ln(2 - \sqrt{2})$ مغيرة إشارتها

ب- ومنه (C_f) يقبل نقطتي إنعطاف عند النقطتين: $A(2\ln(2 + \sqrt{2}); \ln(4 + 2\sqrt{2}))$ و

$B(2\ln(2 - \sqrt{2}); \ln(4 - 2\sqrt{2}))$

(6) الإنشاء:



(7

$$f(x) = m \text{ تكافئ } e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$$

$m = 0$ حل وحيد

$0 < m < \ln 2$ حلين متمايزين

$m \geq \ln 2$ حل وحيد