

ثانوية الشهيد محمد بوجمعة لوطاية
الموسم الدراسي : 2018/2019
المدة : 3 ساعات

مديرية التربية لولاية بسكرة
المستوى: الثالثة ثانوي
الشعبة : العلوم التجريبية

اختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات
الموضوع الأول

التمرين الأول: 5 نقاط :

توجد إجابة واحدة صحيحة لكل حالة حددها مع التبرير:

ج	ب	أ	
0	$-\infty$	$+\infty$	1. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{e^x}\right)$ تساوي
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$	2. إذا كانت f دالة تحقق لكل عدد حقيقي x موجب تماما $x \leq f(x) \leq x^2$ و g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ فإن:
$+\infty$	$-f'(1)$	$f'(1)$	3. إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند 1 فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2h)}{2h}$ تساوي :
\mathbb{R}	$\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$	$\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$	4. مجموعة حلول المتراجحة: $e^{-3x+2} \leq 1$ هي
$u(x) = -e^{-2x} + 1$	$u(x) = e^{2x} + 1$	$u(x) = -e^{-2x} - 1$	5. حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ والذي يحقق $u(0) = 0$ هو u

التمرين الثاني: 7 نقاط :

لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا

معامل توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a=1$ ، $b=0$ ، $c=-3$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين

إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^2 - 3 + me^x = 0$$

التمرين الثالث: 8 نقاط :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j})

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ؛ $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن $g(1)=0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ وليكن (C)

منحناها البياني في المستوي السابق .

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و

فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

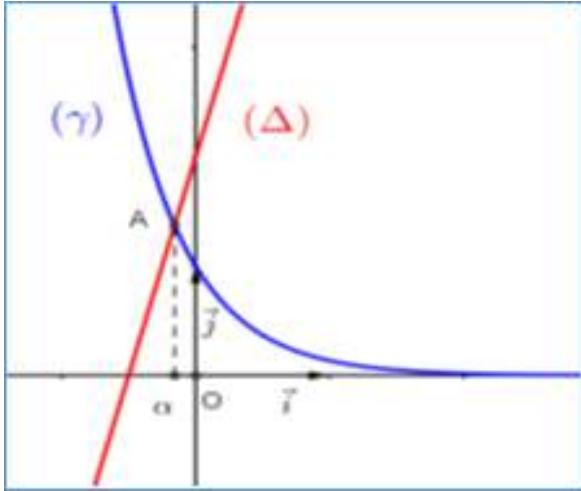
3- أنشئ المنحنى (C) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 5 نقاط : في كل سؤال يوجد اقتراح واحد صحيح ، المطلوب تعيينه مع التبرير:

الرقم	السؤال	أ	ب	ج
1	علما ان f تقبل الاشتقاق عند 3 اذن: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{-x + 3} =$	$f'(3)$	$-f'(3)$	$f'(-3)$
2	f دالة معرفة على IR وتحقق $f(-1) = \frac{1}{2}$ فإن:	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^{-x} - 1) = -\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^{-x} - 1) = e^{\frac{1}{2}}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^{-x} - 1) = \frac{1}{2}$
3	حل المعادلة التفاضلية $y' + 2y + 3 = 0$ الذي يحقق $f(0) = 1$	$f(x) = \frac{5}{2}e^{-x} - \frac{3}{2}$	$f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}$	$f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$
4	مجموعة حلول المتراجحة: $\ln x^2 > \ln(2x - 1)$	$\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$	$\left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup] 1; +\infty \left[$	$] -\infty; +\infty [$
5	عدد حلول المعادلة $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ في IR	2	1	0

التمرين الثاني: 7 نقاط :



1 (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{-2x}$ و (Δ) المستقيم ذو

المعادلة $y = 4x + 2$ ؛ α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ) .

• الدالة المعرفة على المجال \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^{-2x} - 4x - 2$.

أ) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) على

\mathbb{R} ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

ب) تحقق أن: $-0.16 < \alpha < -0.15$.

2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي :

$$f(x) = x + 3 - 2xe^{2x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 2cm .

أ) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^{2x}g(x)$ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مانلا (D) يُطلب تعيين معادلة له ثم أدرس وضعية

(C_f) بالنسبة لـ (D) .

4) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$

5) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) يُطلب تعيين معادلة له .

6) أرسم المستقيم (D) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 3.07$) .

التمرين الثالث: 8 نقاط :

1. لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

2. استنتج انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$ فان : $g(x) \geq \frac{1}{2}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 + 2\ln x}{2x}$

(C_f) : التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
(الوحدة 2cm)

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$
ب) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

3. أ) احسب $f'(x)$ ، ثم بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x) + 1$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

5. أنشئ (C_f) ، (Δ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

بالتوفيق للجميع

العلامة		عناصر الإجابة	محاور الموضوع الدوال العددية
المجموع	مجزأة		

التمرين الأول:

1: 0 (نهاية مركب دالتين) لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2: 0 (النهاية بالحصص) لأن: $x \leq f(x) \leq x^2$ ومنه $\frac{x}{e^x} \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{x^2}{e^x}$ و

$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq 0$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ ومنه

..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

3: $-f'(1)$ لأن: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1+2h)}{2h} = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1+k) - f(1)}{k} = -f'(1)$

4: $\left[\frac{2}{3}; +\infty \right)$ لأن: $e^{-3x+2} \leq 1$ تكافئ $e^{-3x+2} \leq e^0$ ومنه $-3x + 2 \leq 0$ ومنه

..... $x \geq \frac{2}{3}$ ومنه $-3x \leq -2$

5: $f_{-1}(x) = -e^{2x} + 1$ لأن: حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y - 2$ هي الدوال

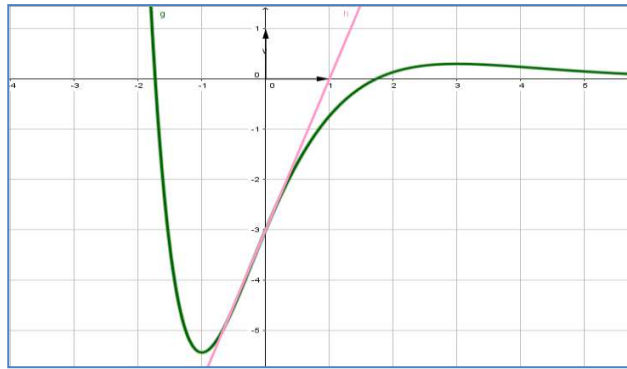
..... $f_c(x) = ce^{2x} + 1$ و $f(0) = 0$ معناه $c = -1$

التمرين الثاني:

(1) تعيين الأعداد الحقيقية

0,5

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل : $f(x)=0$ يكافئ $x^3-3=0$ اي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ أي نقطتي التقاطع هما $A(\sqrt{3};0)$ و $B(-\sqrt{3};0)$.

(4) رسم (C_f) و (T) :

1

(5) المناقشة بيانيا وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$:

0.5

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$. حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$.

المناقشة :

- لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول.
- لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب.
- لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبتان و منه للمعادلة حلين سالبين.
- لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الأخر سالب.
- لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة.
- لما $-m > 0$ أي ان $\frac{6}{e^3} > -m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب.
- لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي ان $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة.
- لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب.

1

الدوال
العددية

(I)

1: تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$:

لنا $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$ و منه $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g : مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2: دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص
الإشارة في الجدول الموالي :

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g(x)$		-	0
			+

(II)

1: تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = 0$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln((\sqrt{x})^2)]^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2\ln(\sqrt{x})]^2}{(\sqrt{x})^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left[\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right]^2 = 0$

لأن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (التزايد المقارن).

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ لدينا $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$:

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: و منه المنحني (C_f)
يقبل مستقيماً مقارب موازياً لمحور الترتيب معادلته $x = 0$.

2: تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ بالحساب نجد

ومنه $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$

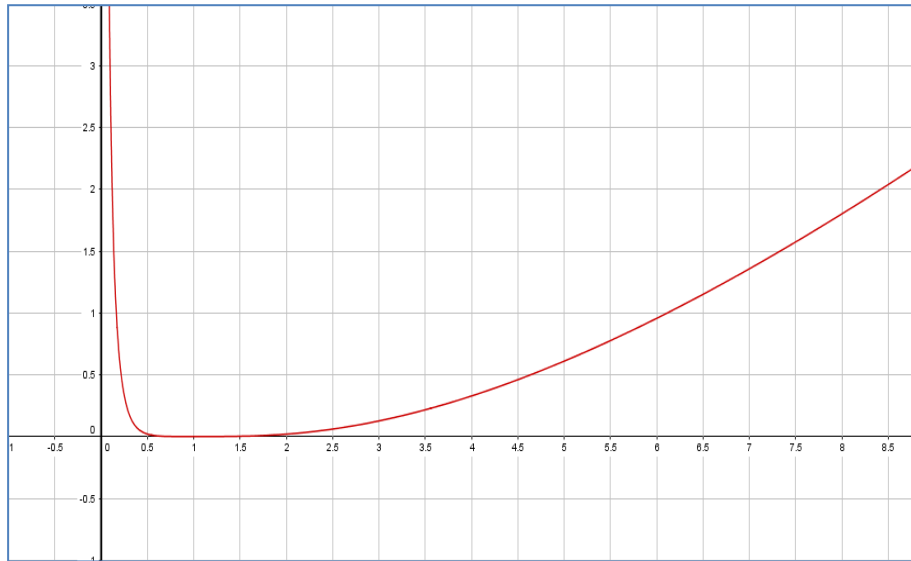
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} (\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

1

3: رسم المنحني (c) :



1

تصحيح الموضوع الثاني:

تصحيح التمرين الأول:

1 :1 $-f'(3)$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{-x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -f'(3)$ (تعريف العدد المشتق).

1 :2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(e^{-x}-1) = \lim_{x \rightarrow +1} f(x) = f(-1) = \frac{1}{2}$ لأن: $\frac{1}{2}$ (نهاية دالة مركبة)

1 :3 $f(x) = \frac{5}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2}$ لأن: المعادلة تكتب $y' = -2y - 3$ وحلها هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} ب:
 $f_c(x) = ce^{-2x} - \frac{3}{2}$ و $f(0) = 1$ معناه $c - \frac{3}{2} = 1$ ومنه نجد $c = \frac{5}{2}$.

1 :4 $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ لأن: أولاً المتراجحة معرفة على $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ و $x^2 > 2x - 1$ معناه $\ln x^2 > \ln(2x - 1)$ ومنه نجد $(x-1)^2 > 0$ وهذه المتراجحة محققة من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ ومنه نجد مجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $S =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\cap \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[= \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

1 :5 حل واحد: لأن: بوضع $t = e^x$ نجد $t^2 - 3t - 4 = 0$ والتي لها حلان هما $t_1 = 4$ و $t_2 = -1$ وحيث ان الحل السالب مرفوض لان $t = e^x > 0$.

تصحيح التمرين الثاني:

(1)

أ) تحديد الوضعية: (γ) يقع فوق (Δ) على المجال $]-\infty; \alpha[$ و تحت (Δ) على $]\alpha; +\infty[$ و (γ) يقطع (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة α .

* استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

1

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

0.5

(ب) التحقق أن $-0.16 < \alpha < -0.15$:
 لدينا: $g(-0.16) \cdot g(-0.15) = 0.017 \times (-0.05) < 0$ ومنه ح ن ق م $-0.16 < \alpha < -0.15$.

(2)

أ) حساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$:

0.5

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{3}{x} - 2e^{2x} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3 - 2xe^{2x}) = -\infty$

(ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = e^{2x}g(x)$: الدالة f قابلة للاشتقاق

على \mathbb{R} ولدينا: $f'(x) = 1 - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = e^{2x}(e^{-2x} - 4x - 2) = e^{2x}g(x)$

0.5+0.5

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ إذن: الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[$ ومنتقصة تماماً على المجال $]\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

0.5

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

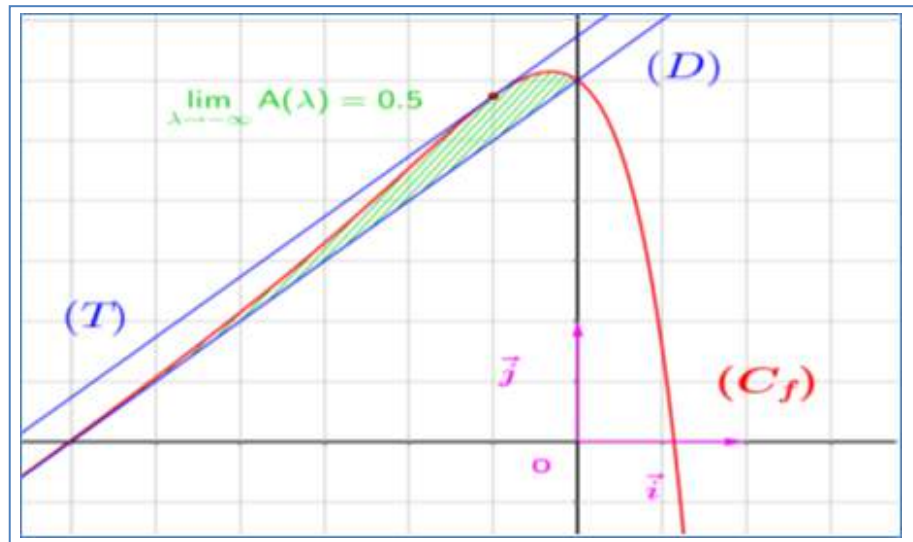
0.5 (3) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) :
لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x e^{2x}) = 0$ و منه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

0.5 * دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) :
لدينا $[f(x) - (x+3)] = -2x e^{2x}$ و منه إشارة الفرق $[f(x) - (x+3)]$ هي عكس إشارة x إذن (C_f) يقع تحت (D) على المجال $]0; +\infty[$ و فوق (D) على المجال $]-\infty; 0[$ و (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(0; 3)$.

0.5 (4) تبيان أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$:
لدينا $g(\alpha) = 0$ معناه : $e^{-2\alpha} - 4\alpha - 2 = 0$ أي : $e^{2\alpha} = \frac{1}{4\alpha + 2}$ نعوض نجد :

$$f(\alpha) = \alpha + 3 - 2\alpha \times \frac{1}{4\alpha + 2} = \alpha + 3 - \alpha \times \frac{1}{2\alpha + 1} = \frac{2\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2\alpha + 1}$$

(5) رسم المستقيم (D) والمنحني (C_f) :



1

1 (6) إثبات أن (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (D) :
لدينا $f'(x) = 1$ تكافئ $-2 e^{2x} - 4x e^{2x} = 0$ أي أن $-2e^{2x}(2x+1) = 0$ ومنه $2x+1=0$ ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (D) عند النقطة ذات الفاصلة $x = -\frac{1}{2}$.
معادلته : $y = x + 3 + \frac{1}{e}$.

تصحيح التمرين الثالث:

.I

(1) دراسة تغيرات الدالة g على $]0; +\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

0.5

• النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• دراسة اتجاه تغير الدالة g :

0.5

حساب $g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$: $g'(x)$

0.5

• دراسة إشارة $g'(x)$: من اجل كل x من $]0; +\infty[$ ، لدينا : $g'(x) > 0$

• تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

0.5

08

(2) استنتاج انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان $g(x) \geq \frac{1}{2}$:

لدينا من جدول التغيرات : الدالة المشتقة g' تتعدم من اجل $x = 1$ وتغير من اشارتها عند

1

تلك القيمة اذن فان $g(1) = \frac{1}{2}$ هي قيمة حدية صغرى للدالة g اي من اجل كل x من المجال

$]0; +\infty[$ فان $g(x) \geq \frac{1}{2}$.

(II)

0.5

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

(2) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

0.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) : $d(x) = f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{\ln x}{x}$

0.5

x	0	1	$+\infty$
$d(x)$	-	0	+

• لما x من المجال $]0; 1[$: (C_f) يقع تحت (Δ)

• لما $x = 1$: (Δ) يقطع (C_f)

• لما x من المجال $]1; +\infty[$: (C_f) يقع فوق (Δ)

(3) حساب $f'(x)$ ، ثم بين انه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x) + 1$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 2 \ln x}{2x} \right)' = \frac{\left(2x + \frac{2}{x} \right) 2x - 2(x^2 + 2 \ln x)}{4x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2 \ln x + 1}{x^2} = \frac{g(x) + 1}{x^2}$$

0.5

لدينا من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان $x^2 > 0$ اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x) + 1$

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ مع تشكيل جدول تغيرات الدالة f :
 • دراسة اشارة $f'(x)$:

من المجال $]0; +\infty[$ ، لدينا اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x) + 1$

0.5

بما ان اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا $g(x) \geq \frac{1}{2}$ فان $g(x) + 1 \geq \frac{3}{2} > 0$ اذن

من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فان $f'(x) > 0$ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0.5

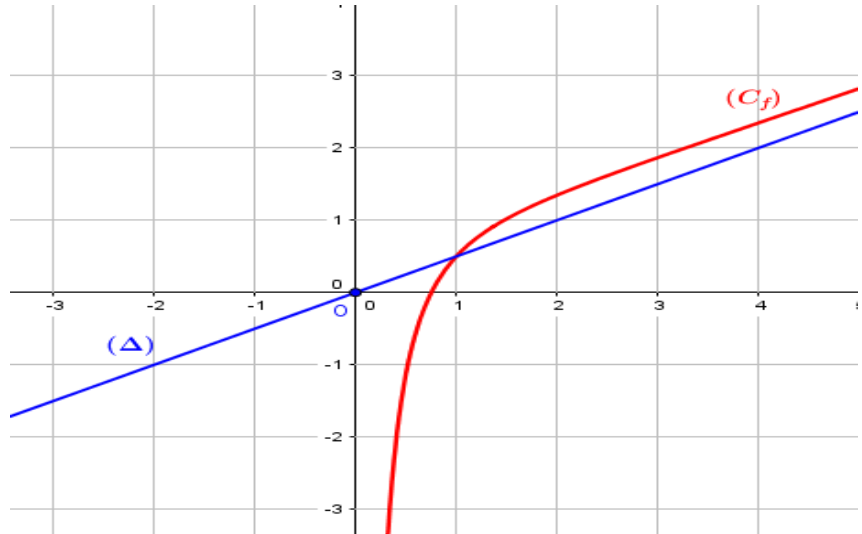
(4) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\frac{1}{2} < \alpha < 1$: الدالة f مستمرة

(مع البرهان) ورتبية تماما على المجال $]0; +\infty[$ اذن حسب مبرهنة

1

القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(5) أنشاء (C_f) و (Δ) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$:



1