مديرية التربية لولاية الأغواط | المستوى: السنة الثالثة ثانوي

الشُعب: العلوم التجريبية 1-2-3 | 02 ديسمبر 2019م

اختبار الفصل الأول في مادة: الرياضيات | المدة: ساعـــتـــان

التمرين الأول: (06 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ على الآتي مع التبرير: (بيان طريقة الحساب)

- حلول المعادلة التفاضلية $y'+2y=3$ هي الدوال $f(x)=Ce^{-2x}-\frac{3}{2}$
- a و b عددان حقيقيان سالبان تماما بحيث $a<b$ فإنَّ $\ln(-a)<\ln(-b)$
- مجموعة حلول المعادلة $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$ هي: $\left\{-2\middle|\frac{3}{2}\right\}$
- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1]$ فإنَّ: $\ln x<0$
- $e^{\ln 5}+e^{\ln -5}=0$
- عبارة التقريب التآلفي للدالة $f(x)=e^{2x}-\ln(x+1)$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بجوار 0 هي $y=2x+e^1$.

التمرين الثاني: (14 نقاط)

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بـــ: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$ وتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{I},\vec{J})$

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. بيِّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما $y=x$ و $y=x+2$
3. أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.
4. بين أن A نقطة انعطاف لـــ: (C_f)
5. بين أنه مهما يكن x فإن: $f(x)+f(-x)=2$
6. أثبت أن A مركز تناظر (Cf)
7. أحسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم استنتج $f(-1)$ و $f(-2)$
8. بين أن المنحنى يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α بحيث: $-2<\alpha<-1$
9. أرسم (Δ) و (C_f).

الإجابة المفصلة لإختبار الفصل الأول لشعبة علوم تجريبية

التمرين الأول:

- خطأ لأن حلول المعادلة التفاضلية $y'+2y=3$ هي الدوال من الشكل $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ مع $C\in$
R أي $y'=-2y+3$ ومنه الحلول هي $f(x)=Ce^{-2x}+\frac{3}{2}$
- خطأ لأن من أجل كل a و b من R^* إذا كان: $-a>-b$ فإنّ: $ln(-a)>ln(-b)$
- خطأ لأن $2(\ln x)^2+\ln x-6=0$.....(1)

نضع: $t=ln\,x$ ومنه: المعادلة (1) تصبح $2t^2+t-6=0$ ونجد $\Delta=49$ ومنه: $t=$
$t=ln\,x=\frac{3}{2}$ و $t=ln\,x=-2$ وعليه نجد: -2 و $\frac{3}{2}$ أي: $S=\begin{cases}x=e^{-2}\\x=e^{3/2}\end{cases}$

- خطأ من أجل $[0;1]$ لدينا: $ln\,x\leq 0$
- خطأ لأنَّ: $e^{\ln 5}+e^{-ln\,5}=e^{ln\,5}+e^{ln\,1/5}=5+\frac{1}{5}=\frac{26}{5}\neq 0$
- خطأ أحسن تقريب تآلفي للدالة $f(x)$ المعرفة على $]-1;+\infty[$ بجوار 0 هو:

$$y\approx f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$\approx f'(0)x+f(0)$$

لدينا: $f(x)=e^{2x}-\ln(x+1)$ وبالاشتقاق نجد: $f'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+1}$

ومنه: $f'(0)=2-1=1$ و $f(0)=1+0=1$

إذن وبعد التعويض في المعادلة $y\approx f'(0)x+f(0)$ نجد: $y\approx x+1$

التمرين الثاني:

1- لدينا الدالة: $f(x)=x+\frac{2}{e^x+1}$

النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2}{e^x+1}\right)=-\infty$ لأنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$ لأنَّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+e^x}=0$

المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على IR أي: $f'(x)=1-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2}$

إشارة المشتقة: لدينا: $e^x>0$ وعليه: $(1+e^x)^2>0$ و $e^x+1>0$ إذن: $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة متزايدة تماماً على مجال تعريفها.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		$+\infty$

2- بيان أن المنحنى يقبل مستقيمين مقاربين:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\frac{2}{1+e^x}-x-2\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{1+e^x}-2\right]=2-2=0$$

أي أن المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y = x + 2$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{2}{1+e^x} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{1+e^x}\right] = 0$$

أي أن المنحنى يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x$

3-معادلة المماس (Δ) عند النقطة A:

لدينا: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

4-بيان أن A نقطة انعطاف:

لدينا: $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$ وبالإشتقاق مرة ثانية نجد: $f''(x) = \frac{(1-e^x)2e^x}{(e^x+1)^3}$

إشارة $f''(x)$: لدينا: $(e^x + 1)^3 > 0$ و $2e^x > 0$ وعليه: $1 - e^x = 0$ أي: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+

ومنه المشتقة الثانية انعدمت عند $x = 0$ مغيرة إشارتها وبالتالي النقطة $A\,(0, f(0))$ أي: $A(0,1)$ نقطة انعطاف.

5-بيان أن $f(x) + f(-x) = 2$:

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x+1} - x + \frac{2}{e^{-x}+1} = \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\frac{1}{e^x}+1} = \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = 2$$

6-الاستنتاج: نستنتج أن النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر لـ(Cf)

7-حساب $f(2)$ و $f(1)$:

$$f(2) = 2 + \frac{2}{e^2+1} \approx 2,24 \quad \text{و} \quad f(1) = 1 + \frac{2}{e^1+1} \approx 1,54$$

8-استنتاج $f(-2)$ و $f(-1)$:

لدينا: $f(x) + f(-x) = 2$ وعليه:

$f(1) + f(-1) = 2$ ومنه: $f(-1) = 2 - f(1) = 2 - 1,54 = 0,46$

$f(2) + f(-2) = 2$ ومنه: $f(-2) = 2 - f(2) = 2 - 2,24 = -0,24$

9-بيان أنه(C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $-2 < \alpha < -1$:

بما أن الدالة مستمرة ومتزايدة تماما على مجال تعريفها ولدينا: $f(-1)f(-2) < 0$

وعليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة α حيث : $-2 < \alpha < -1$

تم بحمد الله

"رفعته الطالبة علاوي مريم جزاها الله ألف خير وجعله في ميزان حسناتها"