

التمرين الأول ( 4 نقاط ) :

نعتبر في المجموعة  $\mathbb{R}$  المعادلة التفاضلية :  $(E) : y'+3y = 2e^{-x}$ .

1- عين قيمة العدد الحقيقي  $a$  بحيث تكون الدالة  $g$  المعرفة على المجموعة  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = a.e^{-x}$  حل للمعادلة  $(E)$ .

2- نعتبر المعادلة التفاضلية :  $(E') : y'+3y = 0$  حل المعادلة  $(E')$ .

3- برهن أن الدالة  $k$  هي حل للمعادلة  $(E)$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $(k - g)$  هي حل للمعادلة  $(E')$ .  
ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة  $(E)$ .

4- عين حلا خاصا  $k$  للمعادلة  $(E)$  بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة  $k$  في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي 4 -.

التمرين الثاني ( 4 نقاط ) :

1- أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي قسمة  $5^n$  على 7

ب- عين باقي قسمة كل من العددين  $5^{1438}$  و  $5^{2017}$  على 7.

2- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  العدد  $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3$  يقبل القسمة على 7.

3- عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي يكون من أجلها  $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n$  قابلا للقسمة على 7.

4-  $n$  عدد طبيعي ، نضع :  $\alpha_n = n^2 + n$  ،  $\beta_n = n + 2$

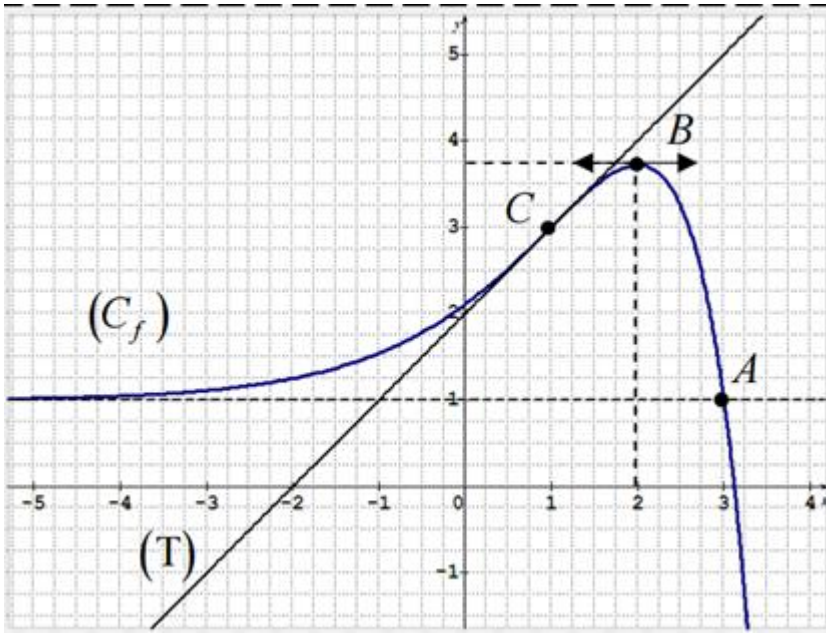
أ. تحقق أن :  $n\beta_n - \alpha_n = n$

ب. أثبت أن :  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = PGCD(\beta_n ; n)$

ج. استنتج القيم الممكنة لـ  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n)$ .

التمرين الثالث ( 5 نقاط ) :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بتمثيلها البياني  $(C_f)$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  حيث  $B(2; e+1)$  و  $A(3; 1)$  و  $C(1; 3)$  من البيان أجب عن الأسئلة التالية :



- (1) عين كلا من  $f'(2)$  و  $f'(1)$  و  $f''(1)$ .
- (2) أكتب معادلة المماس (T) مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة C.
- (3) أ- بين أن المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\alpha \in ]3; +\infty[$  ثم أستنتج اشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .  
ب- شكل جدول تغيرات الدالة f.
- (4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة  $f(x)=f(m)$ .
- (5) لتكن h الدالة المعرفة على  $]-\infty; \alpha[$  كما يلي  $h(x)=f(x)-\ln[f(x)]$   
أ- أعط عبارة  $h'(x)$  بدلالة  $f(x)$  و  $f'(x)$ .

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

### التمرين الرابع ( 7 نقاط ) :

$$\begin{cases} g(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}} & : x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \quad \text{دالة عددية معرفة على } ]0; +\infty[ \text{ كما يلي :}$$

$(C_g)$  تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 0

2. تحقق انه من اجل كل x من المجال  $]0; +\infty[$  فإن  $\frac{g(x)}{x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

3. أدرس قابلية اشتقاق g عند 0 و فسر النتيجة هندسيا

4. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

5. بين ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)-x}{\ln(x)} = 1$  ( لاحظ أن  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$  )

ثم استنتج ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = +\infty$

6. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

7. أحسب  $g(1)$  ;  $g(2)$  ;  $g(3)$  ثم أنشئ  $(C_g)$ .

" تستطيع أن تنجح في حياتك و لو كان الناس يعتقدون أنك غير ناجح و لكن لن تنجح أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك غير ناجح "

الاستاذ : جواليل أحمد - بالتوفيق و النجاح في امتحان البكالوريا 2017

ثانوية الشيخ أمود تمراسات

## تصحيح اختبار في مادة الرياضيات

تصحيح الاختبار الثلاثي الاول شعبة الثالثة رياضيات

التنقيط		عناصر الإجابة	التمارين
كاملة	مجزأة		
4	(1)	<p>1- تعين قيمة العدد الحقيقي <math>a</math> : : <math>g(x) = a.e^{-x}</math> و <math>g'(x) = -a.e^{-x}</math> و لدينا</p> <p><math>g'(x) + 3g(x) = -a.e^{-x} + 3ae^{-x}</math> أي <math>g'(x) + 3g(x) = 2ae^{-x}</math> حتى تكون <math>g</math> حل للمعادلة (E) يكافئ ان <math>2ae^{-x} = 2e^{-x}</math> أي ان <math>a = 1</math>.</p> <p>2- <math>y' + 3y = 0</math> : (E') حلها <math>y = Ce^{-3x}</math> حيث <math>C</math> ثابت حقيقي .</p> <p>3- البرهان أن الدالة <math>k</math> هي حل للمعادلة (E) إذا فقط اذا كانت الدالة <math>(k - g)</math> هي حل للمعادلة (E') :</p> <p>- إذا كانت <math>k</math> حل للمعادلة (E) يكافئ <math>k'(x) + 3k(x) = 2e^{-x}</math> و لدينا</p> <p><math>g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}</math> بالطرح نجد أن <math>g'(x) - k'(x) + 3g(x) - 3k(x) = 0</math> أي</p> <p>ان <math>(g - k)'(x) + 3(g - k)(x) = 0</math> و منه الدالة <math>(k - g)</math> هي حل للمعادلة (E') .</p> <p>- إذا كانت <math>(k - g)</math> حل للمعادلة (E') يكافئ <math>(g - k)'(x) + 3(g - k)(x) = 0</math> يكافئ ان</p> <p><math>k'(x) + 3k(x) = g'(x) + 3g(x)</math> و لدينا <math>g'(x) + 3g(x) = 2e^{-x}</math> و منه</p> <p><math>k'(x) + 3k(x) = 2e^{-x}</math> إذن <math>k</math> حل للمعادلة (E) .</p> <p>إذن حلول المعادلة (E) هي <math>k</math> حيث <math>k(x) - g(x) = C.e^{-3x}</math> و منه</p> <p><math>k(x) = g(x) + C.e^{-3x}</math> أي أن <math>k(x) = 2e^{-x} + C.e^{-3x}</math> و <math>C</math> ثابت حقيقي .</p> <p>4- معامل توجيه المماس للمنحنى الممثل للدالة <math>k</math> في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي 4 - يعني أن <math>k'(0) = -4</math> نحسب المشتقة <math>k'(x) = -2e^{-x} - 3C.e^{-3x}</math> و منه <math>k'(0) = -2 - 3C</math> و</p> <p>نساويها بـ 4 - نجد ان <math>-2 - 3C = -4</math> يكافئ <math>C = \frac{2}{3}</math> و منه <math>k(x) = 2e^{-x} + \frac{2}{3}.e^{-3x}</math></p>	التمرين الاول
4	(1)	<p>1- أ- دراسة بواقي قسمة <math>5^n</math> على 7 حسب قيم العدد الطبيعي <math>n</math></p> <p><math>5^0 \equiv 1[7]</math> و <math>5^1 \equiv 5[7]</math> و <math>5^2 \equiv 4[7]</math> و <math>5^3 \equiv 6[7]</math> و <math>5^4 \equiv 2[7]</math> و <math>5^5 \equiv 3[7]</math> و <math>5^6 \equiv 1[7]</math> نلاحظ أن بواقي قسمة <math>5^n</math> على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 و منه باقي قسمة <math>5^n</math> على 7</p> <p>لما <math>n = 6k</math> هو 1 و لما <math>n = 6k + 1</math> هو 5 و لما <math>n = 6k + 2</math> هو 4 و لما <math>n = 6k + 3</math> هو 6 و لما <math>n = 6k + 4</math> هو 2 و لما <math>n = 6k + 5</math> هو 3 . حيث <math>k</math> عدد طبيعي .</p> <p>ب- لدينا <math>1438 = 6(239) + 4</math> هو من الشكل <math>n = 6k + 4</math> إذن باقي قسمة <math>5^{1438}</math> على 7 هو 2 . و لدينا <math>2017 = 6(336) + 1</math> هو من الشكل <math>n = 6k + 1</math> إذن باقي قسمة <math>5^{2017}</math> على 7 هو 5 .</p> <p>2- إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> العدد <math>26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3</math> يقبل القسمة على 7 لدينا <math>26 \equiv 5[7]</math> بالرفع الى قوى <math>6n+5</math> نجد <math>26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7]</math> و مما سبق نستنتج ان</p> <p><math>5^{6n+5} \equiv 3[7]</math> و منه نجد (1) <math>26^{6n+5} \equiv 3[7]</math> و لدي <math>47 \equiv 5[7]</math> بالرفع الى قوى <math>12n+2</math> نجد <math>47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7]</math> و مما سبق نستنتج ان <math>5^{12n+2} \equiv 4[7]</math> و منه</p> <p><math>47^{12n+2} \equiv 4[7]</math> بالضرب في 2 نجد <math>2 \times 47^{12n+2} \equiv 8[7]</math> و <math>8 \equiv 1[7]</math> إذن</p> <p><math>2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 1[7]</math> و (2) نجد <math>26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 4[7]</math> بإضافة 3 نجد</p>	التمرين الثاني

إذن  $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$  و منه  $7 \equiv 0[7]$  و  $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 7[7]$   
 $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3$  يقبل القسمة على 7 .  
 3- لدينا مما سبق  $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} \equiv 4[7]$  بإضافة  $5n$  نجد  
 $26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 4 + 5n[7]$  العدداً قابلاً للقسمة  
 على 7 يعني أن  $4 + 5n \equiv 0[7]$  أي أن  $5n \equiv -3[7]$  يكافئ  $5n \equiv 4[7]$  بالضرب في 3 نجد  
 $15n \equiv 12[7]$  أي أن  $n \equiv 5[7]$

(1)

لأن  $15 \equiv 1[7]$  و  $12 \equiv 5[7]$  و منه قيم  $n$  المطلوبة هي  $n = 7k + 5 : k \in \mathbb{Z}$

(0,5)

4- أ. التحقق أن :  $n\beta_n - \alpha_n = n$  لدينا  $\begin{cases} n\beta_n = n^2 + 2n \\ \alpha_n = n^2 + n \end{cases}$  بالطرح نجد  $n\beta_n - \alpha_n = n$

ب. إثبات أن :  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = PGCD(\beta_n ; n)$  نضع

$PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = d$  ،  $PGCD(\beta_n ; n) = d'$  لدينا  $d$  قاسم  $\beta_n$  ،  $\alpha_n$  فهو قاسم للعدد  
 $n\beta_n - \alpha_n$  و منه فهو قاسم للعدد  $n$  إذن  $d$  قاسم للعدد  $n$  و  $\beta_n$  و منه  $d$  قاسم لـ  $d' \dots$   
 (3)

$PGCD(\beta_n ; n) = d'$  يعني أن  $d'$  قاسم للعدد  $n$  و  $\beta_n$  فهو قاسم للعدد  $n(n+1)$  و منه  $d'$   
 قاسم للعدد  $\alpha_n$  و منه  $d'$  قاسم للعدد  $\beta_n$  و  $\alpha_n$

(0,25)

إذن  $d'$  قاسم للعدد  $d \dots (4)$

من (3) و (4) نجد أن  $d = d'$  أي أن  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n) = PGCD(\beta_n ; n)$

(0,25)

ج.  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n)$  قاسم للعدد  $n$  و  $\beta_n$  فهو قاسم للعدد  $2 - n = n + 2 - n = \beta_n - n$  القيم  
 الممكنة للعدد  $PGCD(\beta_n ; \alpha_n)$  هي قواسم 2 أي 1 و 2.

5

(1,5)

1- تعيين كلا من  $f'(2) = 0$  معامل توجيه المماس عند النقطة  $B(2; e+1)$  و  $f'(1) = 1$  معامل توجيه المماس عند النقطة  $C(1;3)$  وبما أن نقطة  $C(1;3)$  انعطاف فإن  $f''(1) = 0$ .

(0,5)

2- كتابة معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $C$  هي  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  ولدينا  
 $f(1) = 3$  و  $f'(1) = 1$  بالتعويض نجد  $y = x + 2$ .

(0,5)

3- أ- إما أن  $f$  مستمرة ورتبية على  $]3; +\infty[$  وتأخذ صورها في المجال  $] -\infty; 1[$  و 0 من  
 المجال  $] -\infty; 1[$  فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  من  
 المجال  $]3; +\infty[$ .

(0,5)

جدول إشارة  $f(x)$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
إشارة $f(x)$		+	0 -

(0,5)

ب - جدول تغيرات الدالة  $f$

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	1	$e+1$	$-\infty$

4- المناقشة بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  للعدد حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$  :

(0,75)

حل المعادلة هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$  الذي معادلته  $y = f(m)$

المناقشة :

لما  $m \in ]-\infty; 2[$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.  
 لما  $m = 2$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة تقبل حل وحيد.

لما  $m \in ]2; 3[$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.  
لما  $m \in ]3; +\infty[$  نلاحظ أن  $(C_f)$  و  $(\Delta_m)$  يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة تقبل حل وحيد .

(0,25)

5- أعبارة  $h'(x)$  بدلالة  $f'(x)$  و  $f(x)$  :  $h'(x) = f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة  $h$  لدينا  $h'(x) = f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}$  يكافئ  $h'(x) = f'(x) \left[ \frac{f(x)-1}{f(x)} \right]$

إشارتها

$x$	$-\infty$	2	3	$\alpha$
اشارة $f'(x)$	+	0	-	-
اشارة $f(x)-1$	+	+	0	-
اشارة $h'(x)$	+	0	-	+

(0,25)

و منه  $h$  متزايدة على المجالين  $[3; \alpha[$  و  $]-\infty; 2]$  و متناقصة على المجال  $[2; 3]$  .  
شكل جدول تغيراتها

$x$	$-\infty$	2	3	$\alpha$
$h(x)$		$e+1 - \ln(e+1)$		$+\infty$
	1		1	

(0,25)

1. دراسة استمرارية الدالة  $g$  عند 0 لدينا

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)+\ln(x)}{x}} = 0$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

2. لدينا  $g(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}$  يكافئ  $g(x) = e^{\ln(x)} \cdot e^{\frac{\ln(x)}{x}} = x e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

(0,5)

و منه من اجل كل  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $\frac{g(x)}{x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

طريقة أخرى  $\frac{g(x)}{x} = \frac{e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}}{e^{\ln(x)}} = e^{\frac{(x+1)\ln(x)-\ln(x)}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

(0,5)

3. دراسة قابلية اشتقاق  $g$  عند 0 لدينا  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(h)}{h}} = 0$

(0,5)

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  و  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(h)}{h} = -\infty$

تفسرها هندسيا ان المنحنى  $(C_g)$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(0,75)

4. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

5. تبين ان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)-x}{\ln(x)} = 1$  لدينا

التمرين الرابع

7

(1)

$$t = \frac{\ln(x)}{x} \text{ بوضع } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - x}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{g(x)}{x} - 1\right)}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

(0,5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) - x}{\ln(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ و منه } t \text{ يؤول الى } +\infty \text{ فإن } t \text{ يؤول الى } 0 \text{ و منه}$$

(0,5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln(x) \times \frac{g(x) - x}{\ln(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x) \times 1] = +\infty \text{ : استنتاج ان}$$

6. دراسة تغيرات الدالة  $g$  المشتقة

(0,5)

$$g'(x) = \left[ x e^{\frac{\ln(x)}{x}} \right]' = \left[ e^{\frac{\ln(x)}{x}} + x \left( \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \right) e^{\frac{\ln(x)}{x}} \right] = \left[ \frac{x + 1 - \ln(x)}{x} \right] e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

(0,25)

إشارة المشتقة متعلقة بـ  $x + 1 - \ln(x)$  نضع  $t(x) = x + 1 - \ln(x)$  ندرس تغيرات  $h$  المشتقة  $t'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$  موجبة على المجال  $[1; +\infty[$  و سالبة على المجال  $]0; 1]$  إذن  $t$  متزايدة على  $[1; +\infty[$  و متناقصة على  $]0; 1]$  إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى هي  $t(1) = 2$  و منه نستنتج ان  $t$  موجبة على مجال تعريفها و منه  $g'(x)$  موجبة إذن الدالة  $g$  متزايدة على  $]0; +\infty[$  جدول تغيراتها

(0,5)

$x$	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$+\infty$

(0,75)

7. حساب  $g(1) = 1$  ;  $g(2) = 2e^{\frac{\ln 2}{2}} = 2\sqrt{2}$  و  $g(3) = 3\sqrt[3]{3}$  رسم  $(C_g)$ :

(0,75)

