ثانوية محمود بن محمود/ قالمة — السنة الدراسية : 2020/2019

المادة : رياضيات — المستوى : 3 ع تج – المدة : 2 سا

اختبـــــار الثلاثـــي الأول

التمرين الأول : (08 نقاط)

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير (أي إجابة دون تبرير لا تؤخذ بعين الاعتبار)

1) العدد : $\frac{1}{2}Ln(125) + 2Ln\left(\frac{1}{5}\right) + Ln\sqrt{5}$ هو عدد :

2) عدد حلول المعادلة : $e^{3x} - x - 1 = 0$ هو :

3) عدد حلول المعادلة : $(Lnx)^2 = Ln(x^2)$ هو :

4) حلول المتراجحة : $e^x - e^{-x} \geq 0$ هي :

معدوم	موجب تماما	سالب تماما
0	1	2
0	1	2
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$[0;+\infty[$

5) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة :

زوجية	فردية	ليست زوجية وليست فردية

6) منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ يقبل نقطة انعطاف فواصلها من الشكل :

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}$

7) الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ : $h(x) = \frac{mx^2}{x^2-1}$ حيث $m \in \mathbb{R}^*$ تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل :

$m \in \mathbb{R}_-^*$	$m \in \mathbb{R}^*$	$m \in \mathbb{R}_+^*$

8) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $y = y' - 1$ الذي يحقق $y(Ln2) = 1$ هو :

$x \mapsto e^{\frac{1}{2}(x+1)} + 1$	$x \mapsto e^{(1-x)} - 1$	$x \mapsto e^x - 1$

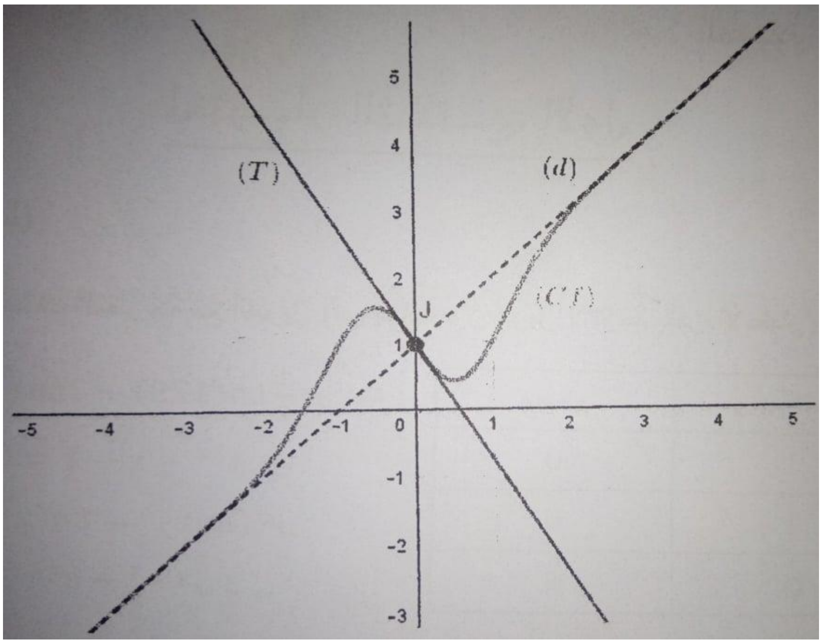
التمرين الثاني : (12 نقطة)

I) نعتبر الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،عبارتها هي : $f(x) = mx + p + (ax+b)e^{-x^2}$.
وليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس$(o;\vec{i};\vec{j})$. (انظر الشكل) .

✐ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

✐ المستقيم (T) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته : $(T): y = (1-e)x + 1$.

✐النقطة $J(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .



1) اكتب معادلة المستقيم (d) .

2) علما أن $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(xe^{-x^2}\right)=0$ ، عين قيمتي كل من m و p .

3) احسب قيمة المجموع : $f(-x)+f(x)$ ، حيث $x\in\mathbb{R}$.

4) باستعمال بعض المعلومات السابقة عين كلا من a و b .

II) بوضع : $a=-e$ ، $b=0$ و $m=p=1$.

1)

أ) بين أن f' مشتقة الدالة f زوجية .

ب) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$.

ج) ادرس تغيرات الدالة f' وشكل جدول تغيراتها .

د) برهن أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $0.51<\alpha<0.52$ ثم استنتج حصرا لـ β .

2) عين معادلتي مماسي (C_f) ، (T_1) و (T_2) الموازيان لـ (d) .

3)

أ) ارسم (T_1) و (T_2) في المعلم السابق.

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

انتهى الموضوع

عرض حال لاختبار الثلاثي الأول

التمرين الأول: (08 نقاط)

تعيين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير:

1- العدد: $\frac{1}{2}\ln(125)+2\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln\sqrt{5}$ هو: عدد معدوم 0,25

التبرير: 0,75

$$\frac{1}{2}\ln(125)+2\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\ln\sqrt{5}=\frac{1}{2}\ln(5^3)+2(-\ln 5)$$
$$+\ln 5^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\ln 5-2\ln 5+\frac{1}{2}\ln 5$$
$$=2\ln 5-2\ln 5=0$$

2- عدد حلول المعادلة: $e^{3x}-x-1=0$ هو: 2 0,25

التبرير: 0,75

$$e^{3x}-x-1=0$$

بوضع: $f(x)=e^{3x}-x-1$

$f'(x)=3e^{3x}-1$

من أجل $x\in\mathbb{R}$:

لدينا:

$$3e^{3x}-1=0$$
$$3e^{3x}=1$$
$$e^{3x}=\frac{1}{3}\rightarrow 3x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)\rightarrow x=-\frac{\ln 3}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\ln 3}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-0,22$	↗ $+\infty$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{\ln 3}{3}\right[$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot f\left(-\frac{\ln 3}{3}\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة نقول أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $\left]-\infty;-\frac{\ln 3}{3}\right[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{\ln 3}{3};+\infty\right[$ و $f\left(-\frac{\ln 3}{3}\right)\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $\left]-\frac{\ln 3}{3};+\infty\right[$

ومنه للمعادلة حلان.

3- عدد حلول المعادلة: $(\ln x)^2=\ln(x^2)$ هو: 2 0,25

التبرير: 0,75

$$(\ln x)^2=\ln(x)^2$$
$$(\ln x)^2-\ln(x^2)=0$$
$$(\ln x)^2-2\ln x=0$$
$$\ln x(\ln x-2)=0$$
$$\begin{cases}\ln x=0\\ \ln x-2=0\end{cases}\quad\begin{cases}\ln x=\ln 1\\ \ln x=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=1\\ x=e^2\end{cases}$$

4- حلول المتراجحة: $e^x-e^{-x}\geq 0$ هي: $[0;+\infty[$ 0,25

التبرير: 0,75

$$e^x-e^{-x}\geq 0$$
$$e^x\geq e^{-x}$$
$$x\geq -x$$
$$x+x\geq 0\rightarrow 2x\geq 0\rightarrow x\geq 0$$
$$x\in[0;+\infty[$$

5- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ هي دالة: زوجية 0,25

التبرير: 0,75

$$f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f(-x)=3\sin\left(-2x-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left[-\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$f(-x)=-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\pi\right]$$
$$f(-x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

ملاحظة: $\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\alpha)$

6- منحنى الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ يقبل نقط انعطاف فواصلها من الشكل:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\ /k\in\mathbb{Z}$$ 0,25

التبرير: 0,75

$$g(x)=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$g'(x)=-6\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$g''(x)=-12\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow g''(x)=0$$

معناه:

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0\rightarrow 2x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ /k\in\mathbb{Z}$$
$$2x=\frac{2\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\rightarrow 2x=\pi+k\pi/k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2}\ /k\in\mathbb{Z}$$

7 - الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{mx^2}{x^2-1}$ حيث $m\in\mathbb{R}^*$ تقبل قيمة حدية محلية وحيدة من أجل: $m\in\mathbb{R}^*$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$$h(x)=\frac{mx^2}{x^2-1}$$

$$h'(x)=\frac{2mx(x^2-1)-2x(mx^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{\cancel{2mx^3}-2mx-\cancel{2mx^3}}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-2mx}{(x^2-1)^2}$$

$h'(x)=0$ إذا كان $x=0$

8 - الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $y=y'-1$ الذي يحقق $y(\ln 2)=1$ هو: $x\mapsto e^x-1$ (0,25)

التبرير: (0,75)

$y=y'-1$

$y'=y+1$

$x\mapsto Ce^x-1$

$Ce^{\ln 2}-1=1$

$2C=2\rightarrow C=1$

ومنه: $x\mapsto e^x-1$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

(I

1 - معادلة المستقيم (d):

النقطتان: $B(-1;0)$, $A(0;1)$ تنتميان إلى المستقيم (d).

$(d): y=ax+b$

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-0}{0+1}=\frac{1}{1}=1 \quad (0,5)$$

$1=1(0)+b$

$b=1$ (0,25)

ومنه: $(d): y=x+1$ (0,25)

2 - تعيين قيمتي m و p:

$$f(x)=mx+p+(ax+b)e^{-x^2}$$

$$f(x)-(mx+p)=(ax+b)e^{-x^2}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(mx+p)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(ax+b)e^{-x^2}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}(a\underbrace{xe^{-x^2}}_{0}+b\underbrace{e^{-x^2}}_{0})$$

$$=0$$

ومنه:

$$\lim_{|x|\to+\infty}f(x)-(mx+p)=0 \quad (0,5)$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة $y=mx+p$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $\pm\infty$ وهو المستقيم (d)

$(d): y=x+1$

$y=mx+p$

بالمطابقة: $\boxed{m=p=1}$ (0,5)

3 - حساب قيمة المجموع: $f(-x)+f(x)$ حيث: $x\in\mathbb{R}$

النقطة $J(0;1)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) (0,25)

لأن:

$f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$

$f(-x)+f(x)=2$ (0,25)

تذكير: مركز التناظر: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ مركز تناظر لـ (C_f) $J(\alpha;\beta)$

4 - تعيين a و b:

* لدينا:

$f(-x)+f(x)=2$

$$f(-x)+f(x)=\cancel{-mx}+p\cancel{-axe^{-x^2}}+be^{-x^2}\cancel{+mx}+p\cancel{+axe^{-x^2}}+be^{-x^2}$$

$$f(-x)+f(x)=2p+2be^{-x^2}=2+2be^{-x^2} \quad p=1$$

$2+2be^{-x^2}=2$

$2be^{-x^2}=0$

$e^{-x^2}\neq 0$ ومنه: $\boxed{b=0}$ (0,5)

* لدينا: المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 والذي معادلته: $(T): y=(1-e)x+1$

أي:

$f'(0)=1-e$

$f'(x)=m+ae^{-x^2}-2xe^{-x^2}(ax+b)$

$f'(x)=m+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}-\cancel{2bxe^{-x^2}}$

$f'(x)=1+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}$

$f'(0)=1+a$

$1+a=1-e$

ومنه: $\boxed{a=-e}$ 0,25

II

$f(x)=x+1-exe^{-x^2}$

1) أ/ تبيان أن f' مشتقة الدالة f زوجية:

ط1: لدينا:

$f(x)+f(-x)=2$

$f'(x)+(-f'(-x))=0$

$f'(x)=f'(-x)$ 0,25

ومنه $f'(x)$ دالة زوجية.

ط2: لدينا: (4 س)

$f'(x)=1+ae^{-x^2}-2ax^2e^{-x^2}$

$a=-e$

$f'(x)=1-ee^{-x^2}-2ex^2e^{-x^2}$

$f'(-x)=1-ee^{-(-x)^2}-2e(-x)^2e^{-(-x)^2}$

$f'(-x)=1-ee^{x^2}-2ex^2e^{-x^2}=f'(x)$

ومنه $f'(x)$ دالة زوجية.

ب/ تبيان أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$

لدينا:

$f'(x)=1-ee^{-x^2}-2ex^2e^{-x^2}$

$f'(x)=1-e^{-x^2+1}-2x^2e^{-x^2+1}$

$f'(x)=1-e^{-x^2+1}(1-2x^2)$

$f'(x)=1+(2x^2-1)e^{-x^2+1}$ 0,25

جـ/ دراسة تغيرات الدالة f':

حساب النهايات:

$f'(x)=1+2x^2e^{-x^2+1}-e^{-x^2+1}$

$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2+1}-e^{-x^2+1}\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2}.e^1-e^{-x^2}.e^1\right)$

بوضع $X=-x$ ومنه: $x\to-\infty$ فإن $X\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{X\to+\infty}\left(1+2X^2e^{-X^2}e^1-e^{-X^2}e^1\right)$

$=\lim_{X\to+\infty}\left(1+2\frac{X^2}{e^{X^2}}e-\frac{1}{e^{X^2}}e\right)$

$=\lim_{X\to+\infty} 1+2\left(\frac{X}{e^X}\right)^2e-\frac{1}{e^{X^2}}e=1$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+2x^2e^{-x^2+1}-e^{-x^2+1}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\frac{x^2}{e^{x^2}}e-\frac{e}{e^{x^2}}\right)$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+2\left(\frac{x}{e^x}\right)^2e-\frac{e}{e^{x^2}}\right)=1$ 0,25

$f''(x)=4xe^{-x^2+1}-2xe^{-x^2+1}(2x^2-1)$

$f''(x)=4xe^{-x^2+1}-4x^3e^{-x^2+1}-2xe^{-x^2+1}$

$f''(x)=(4x-4x^3-2x)e^{-x^2+1}$

$f''(x)=-2x(-2+2x^2-1)e^{-x^2+1}$

$f''(x)=-2x(2x^2-3)e^{-x^2+1}$ 0,25

إشارة $f''(x)$ من إشارة $-2x(2x^2-3)$.

$f''(x)=0$

معناه: إما: $-2x=0$

$x=0$

أو $2x^2-3=0$

$2x^2=3$

$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ أو $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-2x$		+		+	0	−		−	
$2x^2-3$		+	0	−		−	0	+	
$f''(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
$f'(x)$	1	↗	$1+\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	$1-e$	↗	$1+\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	1

0,25

د- برهان أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,51<\alpha<0,52$ ثم استنتاج حصر لـ β:

الدالة f' مستمرة ومتزايدة تماما على $[0,51;0,52]$

و $f'(0,51)\times f'(0,52)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,51<\alpha<0,52$ 0,25

* استنتاج حصر لـ β: بما أن f' زوجية فإن: $f'(-\alpha)=f'(\alpha)=0$ 0,25

ومنه: $\beta=-\alpha$ أي $-0,52<\beta<-0,51$ 0,25

② - تعيين معادلتي مماسي (C_f)، (T_1) و (T_2) الموازيان لـ (d):

$(d): y = x + 1$

نحل المعادلة:

$f'(x) = 1$

$1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1} = 1$

$(2x^2-1)e^{-x^2+1} = 0$

لأن $e^{-x^2+1} \neq 0$

$2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow$ إما $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ أو $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

0,25

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(T_1): y = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1\right)e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1}$

$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \left(\frac{2\times 2}{4} - 1\right)e^{-\frac{2}{4}+1} = 1$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - e\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{2}{4}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$(T_1): y = 1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$

$(T_1): y = x - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$

$(T_1): y = x + 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$ 0,25

$(T_2): y = f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + e\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{2}{4}+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$(T_2): y = 1\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}$

$(T_2): y = x + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$

$(T_2): y = x + 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$ 0,25

③ - أ / - رسم (T_1) و (T_2) 0,5

ب/ - الحل البياني:

الحل البياني للمعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y_m = x + m$ الموازي لـ (d)، (T_1) و (T_2) 0,25×7

- إذا كان $m < 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة $f(x) = x + m$ لا تقبل حلولا.

- إذا كان $m = 1 - \frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا تماما.

- إذا كان $1 - \frac{\sqrt{2e}}{2} < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما.

- إذا كان $m = 1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما.

- إذا كان $1 < m < 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين سالبين تماما.

- إذا كان $m = 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا تماما.

- إذا كان $m > 1 + \frac{\sqrt{2e}}{2}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.