

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول (⊗) : 08 نقاط

- I. عدد طبيعي غير معدوم .
نضع $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ ونسمي $\delta = PGCD(\alpha; \beta)$
أ. عين القيم الممكنة لـ δ .
ب. برهن أن α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$.
ج. استنتج قيم $PGCD(\alpha; \beta)$ حسب قيم العدد الطبيعي n .
- II. نعتبر العددين a و b المعرفين بـ : $a = n^2 + 2n - 3$ و $b = 2n^2 - n - 1$
أ. بين أن العدد $n-1$ يقسم كلا من العددين a و b .
ب. نضع $d = PGCD(a; b)$. عين قيم d حسب قيم العدد الطبيعي n .
ج. عين قيمة d من أجل $n = 2015$.

التمرين الثاني (⊗) : 12 نقطة

- I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{2e-x}{x} - \ln(x)$
1- أدرس تغيرات الدالة g .
2- أحسب $g(e)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $f(x) = (2e - |x|) \times \ln|x|$
(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .
1- برهن أن الدالة f زوجية .
2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$.
3- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .
4- أ) عين نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل .
ب) أحسب $f(e^2)$ ثم أرسم المنحني (C_f) .
- III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = (2e - x) \times |\ln x|$
1- أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
2- بين كيفية الحصول على (C_h) ثم أرسمه .

مع تمنياتي للتم بالتوفيق والنجاح 🌸 أستاذ الماوة

تصحیح الاختبار الأول

[Sous-titre du document]

القسم : 3 ثانوي الشعبة : رياضيات

من إنجاز الأستاذ : ثابت إبراهيم

30/11/2014

العلامات مجزأة	التصحيح
	التمرين الأول : (08 نقاط)
01.5	<p>I. لدينا : $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ ونسمي $\delta = PGCD(\alpha; \beta)$</p> <p>(أ) تعيين القيم الممكنة لـ δ :</p> <p>- لدينا : δ / α و δ / β ومنه $\delta / 2\alpha - \beta$ أي $\delta / 2(n+3) - (2n+1)$ وبالتالي : $\delta / 5$ أي $\delta \in D_5$ إذن : $\delta \in \{1, 5\}$</p>
01.5	<p>(ب) البرهان أن α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$:</p> <p>- (1) إذا كان α و β من مضاعفات العدد 5 فإن $5 / \alpha$ و $5 / \beta$ ومنه $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases}$ أي $\begin{cases} n+3 \equiv 0[5] \\ 2n+1 \equiv 0[5] \end{cases}$ ومنه $3n+4 \equiv 0[5]$ أي $3n \equiv -4[5]$ وبالتالي $3n \equiv 5-4[5]$ إذن $3n \equiv 1[5]$ أي أن : $2 \times 3n \equiv 2 \times 1[5]$ - وبالتالي $n \equiv 2[5]$</p> <p>(2) إذا كان $n \equiv 2[5]$ فإن $\begin{cases} n+3 \equiv 2+3[5] \\ 2n+1 \equiv 2 \times 2+1[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases}$ أي α و β من مضاعفات العدد 5 α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان ، $n \equiv 2[5]$</p>
01	<p>(ج) استنتاج قيم $PGCD(\alpha; \beta)$ حسب قيم العدد الطبيعي n :</p> <ul style="list-style-type: none"> • إذا كان $n \equiv 2[5]$ أي $n = 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإن $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ • إذا كان $n \neq 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإن $PGCD(\alpha; \beta) = 1$
01	<p>II. لدينا : $a = n^2 + 2n - 3$ و $b = 2n^2 - n - 1$</p> <p>(أ) تبيان أن العدد $n-1$ قاسم للعددين a و b :</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا : $a = (n-1)(n+3)$ و $b = (n-1)(2n+1)$ أي أن $(n-1) / a$ و $(n-1) / b$
01	<p>(ب) تعيين قيم d حسب قيم العدد الطبيعي n :</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا : $d = PGCD(a; b) = PGCD((n-1)(n+3); (n-1)(2n+1))$ أي $d = (n-1) \times PGCD(n+3; 2n+1) = (n-1) \times PGCD(\alpha; \beta)$ وبالتالي : $d = (n-1) \times \delta$ - إذا كان $n = 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإن $d = 5(n-1)$ لأن $\delta = 5$ - أما إذا كان $n \neq 5k+2 (k \in \mathbb{N})$ فإن $d = n-1$ لأن $\delta = 1$
01	<p>(ج) تعيين قيمة d من أجل $n = 2015$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا : $2015 \equiv 0[5]$ أي $2015 \equiv 2[5]$ وبالتالي $d = 2015 - 1 = 2014$

التمرين الثاني : (12 نقطة)

$$D_g =]0; +\infty[$$

• لدينا : $g(x) = \frac{2e-x}{x} - \ln x$

1- دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات :

2×0.25

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e-x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e-x}{x} - \ln x \right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2e-x}{x} - \ln x \right) = -\infty$$

• حساب المشتقة :

$$g'(x) = \frac{-x - (2e-x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-x - 2e + x - x}{x^2} = \frac{-x - 2e}{x^2}$$

0.75

$$g'(x) = \frac{-x - 2e}{x^2}$$

• دراسة إشارة المشتقة :

$$g'(x) = 0 \text{ يعني } -x - 2e = 0$$

ومنه $x = -2e$ لكن $x \in]0; +\infty[$ لكن $(-2e) \notin]0; +\infty[$

وبالتالي من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) \neq 0$

0.5

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-

• جدول تغيرات الدالة g :

0.5

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$		$+\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -\infty$

2- حساب $g(e)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

$$g(e) = \frac{2e-e}{e} - \ln e = 1 - 1 = 0$$

• جدول إشارة $g(x)$:

0.25

0.5

x	0	e	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$f(x) = (2e - |x|) \times \ln |x|$$

• لدينا II :

1- البرهان على أن الدالة f زوجية :

• لدينا D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}^*$

$$\text{ولدينا : } f(-x) = (2e - |-x|) \times \ln |-x| = (2e - |x|) \times \ln (|x|) = f(x) \text{ لأن } |-x| = |x|$$

ومنه f دالة زوجية

0.5

2- تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = g(x)$:

• من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $f(x) = (2e-x) \times \ln x$

ومنه $f'(x) = -\ln x + (2e-x) \times \frac{1}{x} = \frac{2e-x}{x} - \ln x = g(x)$

أي $f'(x) = g(x)$

0.75

3- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على \mathbb{R}^* :

• إشارة $f'(x)$ من أجل $x \in]0; +\infty[$ من نفس إشارة $g(x)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

ثم نكمل جدول إشارة $f'(x)$ بالتناظر بالنسبة إلى 0 لأن f زوجية .

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0 -		+	0 -

01

• جدول تغيرات الدالة f :

• حساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e-x) \times \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e-(-x)) \times \ln(-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(2e-x) \times \ln x] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(2e-(-x)) \times \ln(-x)] = -\infty$$

4×0.25

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0 -		+	0 -
$f(x)$			e		e	
	$-\infty$		$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$

0.5

4- أ) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل :

$$f(x) = 0 \text{ يعني } (2e-|x|) \times \ln|x| = 0$$

$$\text{إما } 2e-|x|=0 \text{ ومنه } |x|=2e \text{ أي } x=2e \text{ أو } x=-2e$$

$$\text{أو } \ln|x|=0 \text{ ومنه } |x|=1 \text{ أي } x=1 \text{ أو } x=-1$$

$$\text{وبالتالي : } (C_f) \cap (x'x) = \{(-2e;0), (-1;0), (1;0), (2e;0)\}$$

01

ب) حساب $f(e^2)$

$$f(e^2) = (2e-e^2) \times \ln e^2 = 4e - 2e^2 \approx -3.9$$

0.25

III. لدينا : $h(x) = (2e-x) \times |\ln x|$

1- كتابة $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

إشارة $\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0 +

0.5

01

• إذا كان $x \in]0;1[$ فإن $h(x) = (2e-x) \times (-\ln x) = -f(x)$

• إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإن $h(x) = (2e-x) \times \ln x$

• كيفية الحصول على (C_h) باستعمال (C_f) :

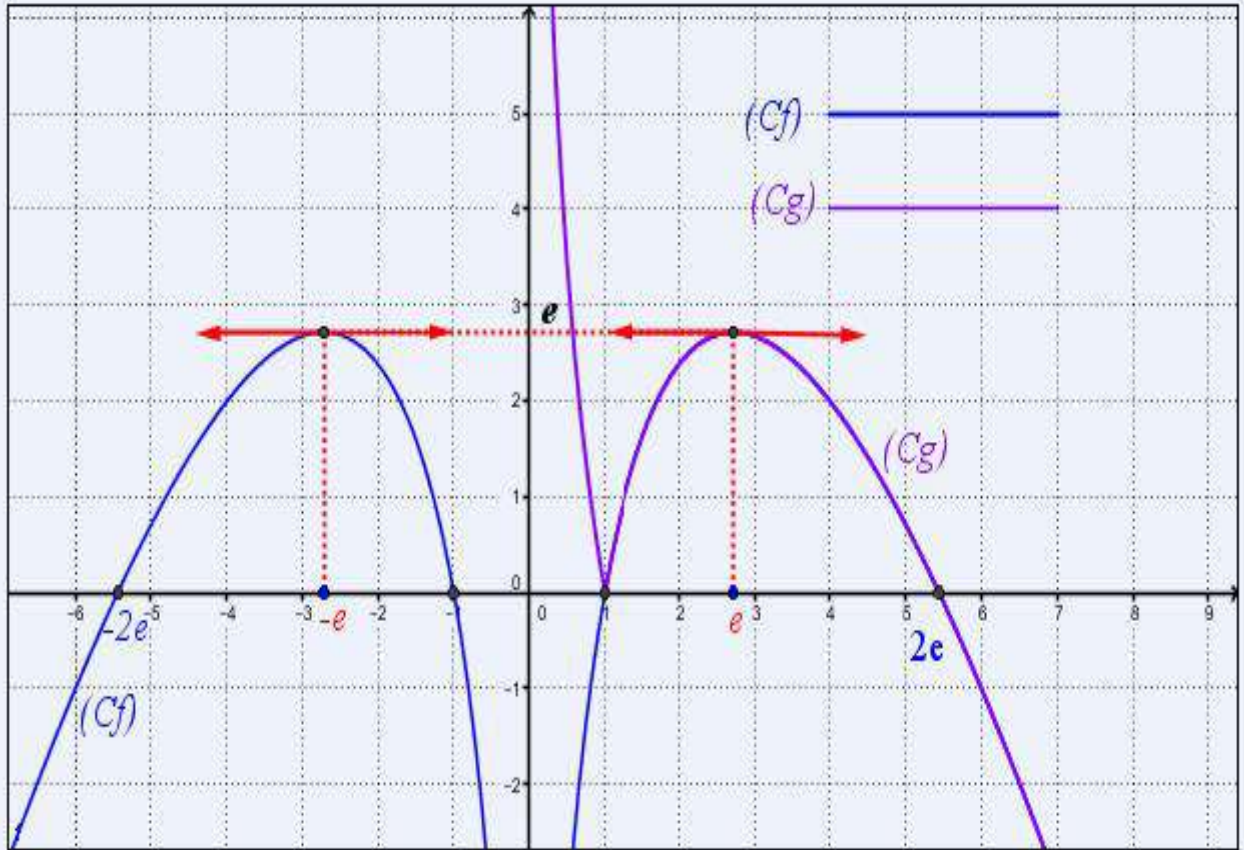
0.5

- إذا كان $x \in]0;1[$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

- إذا كان $x \in [1;+\infty[$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) .

👉 الرسم :

02



👉 انتهى تصحيح الاختبار الأول 2014 – 2015



😊 بالتوفيق في البكالوريا 2015 🌸

