

الأول في مادة الرياضيات

:

:

كل إجابة تقدم على ورقة المحاولة لا تصحح

التمرين الأول : 13

الجزء الأول :

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1$

1- ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

2- بين انه من أجل كل عدد حقيقي  $x : g(x) > e - 1$

- استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

الجزء الثاني :

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \frac{-x^2 + ex}{x-1} - \ln(e^{-x} + 1)$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم بين أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e - 1$

- استنتج المستقيم المقاربة لمنحنى الدالة  $f$ .

2- بين أنه من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^2 (e^x + 1)}$

3- استنتج اتجاه التغير الدالة  $f$ , ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + e - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

5- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\lambda$  حيث :  $-0,5 < \alpha < -0,3$  و  $2,6 < \lambda < 2,7$ .

6- ضع النتيجة دون حساب  $\lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda}$ , ثم فسر النتيجة هندسيا.

7- انشاء كلا من المستقيمات المقاربة والمنحنى  $(C_f)$ .

8- ناقش بياننا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما  $\lambda$  عدد حلول المعادلة :  $e^{\frac{-x^2 + ex}{x-1}} = \frac{\lambda}{e^x} + \lambda$

9- لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h(x) = \frac{-x^2 - e|x|}{-|x| - 1} - \ln(e^{|x|} + 1) + \ln 2$

10- جد العلاقة بين الدالة  $h$  والدالة  $f$ .

11- انشاء المنحنى  $(C_h)$  انطلاقا من منحنى الدالة  $f$ .

نتوقف عن المحاولة نتوقف عن الإبداع

## التمرين الثاني : 7ن

- تكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_0 = 1; u_1 = 2$  و  $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$
- 1- نعتبر  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  بمايلي:  $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$  حيث  $\beta; \alpha$  عدنان حقيقيان غير معدومين.
- أ- احسب  $u_2; u_3$ .
- ب- احسب  $v_1; v_2; v_3$  بدلالة  $\alpha$  و  $\beta$ .
- ج- بين أنه إذا كانت  $v_1, v_2, v_3$  ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ:  $-\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha^2 = 0$
- 2- نضع  $\beta = \alpha$
- أ- برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- ب- اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ :  $u_n + u_{n-1} = 3^n$
- ج- احسب  $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$
- 3- نضع  $\beta = -3\alpha$
- أ- برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
- ب- اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ :  $u_n + u_{n-1} = (-1)^n$
- 4- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية معناه  $\beta = \alpha$  أو  $\beta = -3\alpha$

انتهى بالتوفيق للجميع

مع تحيات

الأستاذ: قشار صالح

ننوقف عن المحاولة ننوقف عن الابداع



## الحل النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

ثانوية سيدي اعجاز الثالثة تقني رياضي ورياضيات

### التمرين الأول:

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$g(x) = (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1$$

-1 دراسة تغيرات الدالة  $g$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + e)e^x + e - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = x^2 e^x - 2x e^x + e e^x + e - 1 = e - 1$$

حساب المشتقة:

$$g'(x) = (2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x + e) = e^x(x^2 - 2 + e)$$

لدينا  $x^2 - 2 + e > 0$  ومنه  $g'(x) > 0$  ومنه الدالة  $g$  متزايدة تماما.

تبيان انه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $g(x) > e - 1$

بما أن الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = e - 1$

فإن  $g(x) > e - 1$

استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$ .

بما أن  $e - 1 > 0$  فإن  $g(x) > 0$

### الجزء الثاني:

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1)$$

-1 حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ثم بين أن:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} -x^2 + ex = -1 + e \\ \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + ex = -1 + e \\ \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^+ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x}(1 + e^x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} + x - \ln(1 + e^x)$$

$$= \frac{-x^2 + ex + x^2 - x}{x - 1} - \ln(1 + e^x)$$

$$= \frac{x(e - 1)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} - \ln(1 + e^x) = e - 1$$

- استنتاج المستقيم المقاربة لمنحنى الدالة  $f$ .

للمنحنى مستقيمتا مقاربة التالية:  $x = 1$ ;  $y = e - 1$

$$-2 \text{ تبيان أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{1\}: f'(x) = \frac{-g(x)}{(x-1)^2(e^x+1)}$$

$$f'(x) = \frac{(-2x+e)(x-1) - (-x^2+ex)}{(x-1)^2} + \frac{e^{-x}}{e^x+1}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x + ex - e + x^2 - ex}{(x-1)^2} + \frac{1}{e^x+1}$$

$$= \frac{(-x^2 + 2x - e)(e^x + 1) + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2(e^x + 1)}$$

$$= \frac{(-x^2 + 2x - e)e^x - e + 1}{(x-1)^2(e^x + 1)} = \frac{-g(x)}{(x-1)^2(e^x + 1)}$$

-3 استنتاج اتجاه التغير الدالة  $f$ , ثم تشكيل جدول تغيراتها.

لدينا  $(x-1)^2(e^x+1) > 0$  و  $-g(x) < 0$  ومنه  $f'(x) < 0$  ومنه

الدالة  $f$  متناقصة تماما.

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$e-1$	$+\infty$	$-\infty$

-4 تبيان أن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + e - 1$  مقارب

مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x + e - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + ex}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) + x - e - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - 1}{x - 1} - \ln(e^{-x} + 1) = 0$$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = -x + e - 1$  مقارب

مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

$$f(x) = \ln(\lambda) \text{ ومنه } f(x) = \ln(\lambda)$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  و

$$y = \ln \lambda \text{ المستقيم}$$

$$[-\infty; e^{-1}[\text{يكافئ } \ln \lambda \in ]0; e^{-1}] \text{ للمعادلة حلين.}$$

$$[e^{-1}; +\infty[\text{يكافئ } \ln \lambda \in [e^{-1}; +\infty[ \text{ للمعادلة حل وحيد}$$

لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$h(x) = \frac{-x^2 - e|x|}{-|x| - 1} - \ln(e^{|x|} + 1) + \ln 2$$

$$10- \text{ إيجاد العلاقة بين الدالة } h \text{ والدالة } f : h(x) = f(-|x|) + \ln 2$$

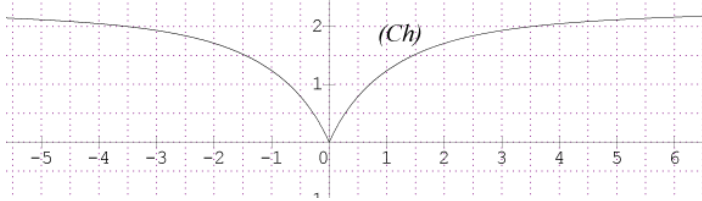
لدينا  $x \mapsto f(-|x|)$  منحناها هو نظير الجزء من المنحنى  $(C_f)$

الواقع في المجال  $]-\infty; 0]$

ومنه  $(C_h)$  هو صورة لمنحنى الدالة  $f(-|x|)$  بانسحاب  $x \mapsto f(-|x|)$

الذي شعاعه  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$

11- انشاء المنحنى  $(C_h)$  انطلاقا من منحنى الدالة  $f$ .



انتهى بالتوفيق للجميع

الأستاذ: قشار صليح

نوقف عن المحاولة نوقف عن الابداع



5- تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\alpha$  و  $\lambda$  حيث:

$$-0,5 < \alpha < -0,3 \text{ و } 2,6 < \lambda < 2,7$$

الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماما على  $[-0,5; -0,3]$  و

$$f(-0,5) = 0,1 \text{ و } f(-0,3) = -0,1 \text{ بما أن } f(-0,3) < 0 < f(-0,5)$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن  $f(x) = 0$

$$\text{تقبل حلا } \alpha \text{ حيث } -0,5 < \alpha < -0,3$$

الدالة  $f$  مستمرة ورتبية تماما على المجال  $[2,6; 2,7]$

$$f(2,6) = 0,12 \text{ و } f(2,7) = -0,02$$

$$\text{بما أن } f(2,6) > 0 > f(2,7)$$

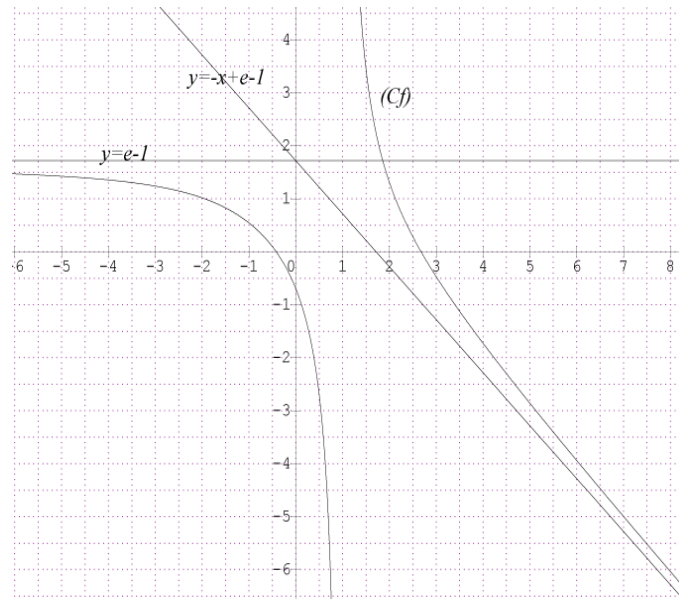
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن  $f(x) = 0$

$$\text{تقبل حلا } \lambda \text{ حيث } 2,6 < \lambda < 2,7$$

$$6- \lim_{x \rightarrow \lambda} \frac{f(x) - f(\lambda)}{x - \lambda} = f'(\lambda) \text{ التفسير النتيجة هندسيا}$$

العدد  $f'(\lambda)$  معامل توجيه المماس عند الفاصلة  $\lambda$ .

7- انشاء كلا من المستقيمتين المقاربتين والمنحنى



9- المناقشة بيانا حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما  $\lambda$  عدد حلول

$$\text{المعادلة: } e^{\frac{-x^2 + ex}{x-1}} = \frac{\lambda}{e^x} + \lambda$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x-1} = \ln\left(\frac{\lambda}{e^x} + \lambda\right)$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x-1} = \ln\left(\lambda\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)\right)$$

$$\text{ومنه } \frac{-x^2 + ex}{x-1} = \ln \lambda + \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$

$$\frac{-x^2 + ex}{x-1} - \ln(e^{-x} + 1) = \ln \lambda$$

$$1. v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$$

أ. حساب الحدود :  $u_2 = 7$  ;  $u_3 = 20$  .

ب. حساب الحدود :  $v_1$  ;  $v_2$  ;  $v_3$  ،  $v_1 = 2\alpha + \beta$  ،  $v_2 = 7\alpha + 2\beta$  ،  $v_3 = 20\alpha + 7\beta$  .

ج.  $v_1$  ;  $v_2$  ;  $v_3$  حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه  $v_2^2 = v_1 \times v_3$  معناه  $(7\alpha + 2\beta)^2 = (2\alpha + \beta)(20\alpha + 7\beta)$   
معناه  $9\alpha^2 - 6\alpha\beta - 3\beta^2 = 0$  معناه  $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2. نضع  $\beta = \alpha$  :

أ. لدينا  $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$  معناه  $v_n = \alpha(u_n + u_{n-1}) \cdots \cdots (1)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} + u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n) \\ &= \alpha(3u_n + 3u_{n-1}) \quad \text{ب. ومنه} \\ v_{n+1} &= 3v_n \end{aligned}$$

$(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = 3$  و حدها الأول  $v_1 = 3\alpha$  .

ت. لدينا :  $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$  و منه  $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$  معناه :  $v_n = \alpha \times 3^n \cdots \cdots (2)$  من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n \quad \text{معناه} \quad u_n + u_{n-1} = 3^n$$

حساب المجموع:  $P_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$  لدينا  $v_n = \alpha \times 3^n$  ومنه

$$\begin{aligned} P_n &= \alpha \times 3^1 \times \alpha \times 3^2 \times \cdots \times \alpha \times 3^n \\ &= \alpha^n \times 3^{1+2+\dots+n} \\ P_n &= \alpha^n 3^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

3. نضع  $\beta = -3\alpha$  :

أ. إثبات أن  $(v_n)$  متتالية هندسية .

لدينا  $v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1} \cdots \cdots (1)$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha(u_{n+1} - 3u_n) \\ &= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n) \\ &= \alpha(-u_n + 3u_{n-1}) \quad \text{و منه} \\ &= -\alpha(u_n - 3u_{n-1}) \\ v_{n+1} &= -v_n \end{aligned}$$

$(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = -1$  و حدها الأول  $v_1 = -\alpha$  .

ب. لدينا  $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$  و منه  $v_n = \alpha(-1)^n \cdots \cdots (2)$  من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n \quad \text{و منه}$$

$$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$$

4.  $(v_n)$  متتالية هندسية معناه  $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

$\Delta = 16\beta^2$  معناه  $\alpha = \beta$  و  $\alpha = -3\beta$  .