ثانوية أول نوفمبر 1954

المدة: ساعتان

التاريخ: 2018/12/03

3

رياضيات

الاختبار الاوّل في مـــــــادة الرياضيات

التمرين الأول: التوقيت (30 دقيقـــــــــــة)

05 نقاط

(ملاحظة : كل إجابة دون تبرير لا تأخذ بعين الاعتبار)

أجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1) من أجل كل عدد طبيعي n : 3 يقسم $2^{2n}-1$

2) باقي قسمة العدد 2018^{1439} على 7 هو 2

3) في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون $\overline{3421}^7+\overline{1562}^7=\overline{5413}^7$

4) المعادلة : $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

5) في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة : $x^2-x+6\equiv 0[9]$ حلولها تحقق $x\equiv 4[9]$ أو $x\equiv 6[9]$

التمرين الثاني: التوقيت (30 دقيقـــــــــــة)

06 نقاط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$ و ليكن (C_f) منحنيها البياني (في الوثيقة المرفقة) .

1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على N بـ : $u_0=3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- مثل(على الوثيقة المرافقة) الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل دون حساب الحدود .

ب - أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

جـ - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$.

د- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$ ثم استنتج انها متقاربة معينا نهايتها

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـــ : $v_n={u_n}^2-1$ ،

أ/ برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، أحسب حدها الأول.

ب/ أكتب v_n بدلالة n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ من جديد

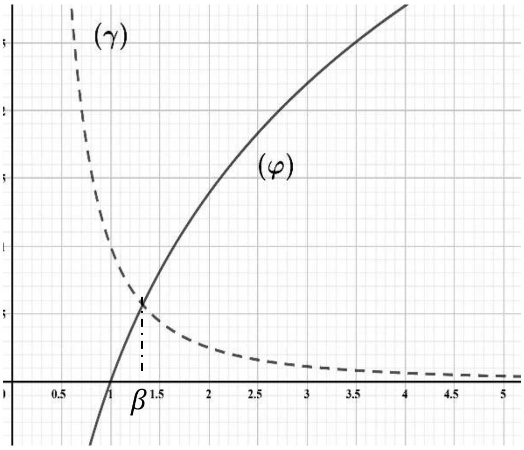
4) أحسب بدلالة n كلا من المجاميع الآتية: $S_n={u_0}^2+{u_1}^2+\cdots\ldots+{u_n}^2$

$T_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\cdots+2^nv_n$ $\quad$ $L_n=ln(v_0)+ln(v_1)+\cdots+ln(v_n)$

09
نقاط

التمرين الثالث

التوقيت (50 دقيقـــــــــة)



الجزء الأول:

(γ) و (φ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ و $x \mapsto 2lnx$

على الترتيب في المعلم المتعامد $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ كما في الشكل المقابل:

β هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (φ) حيث: $1.32 < \beta < 1.33$

g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{1}{x^2} - 2lnx$.

أ) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0;+\infty[$ ،

ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + ln\,x)$.

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) أحسب: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$.

ب/عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f\left(\frac{\beta h+1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\beta}\right)}{h}$، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج/ تأكّد أنّ الدالة f متزايدة على المجال $\left]0;\frac{1}{\beta}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{1}{\beta};+\infty\right[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بين أن المستقيم $(\varDelta)$ ذو المعادلة: $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم $(\varDelta)$.

4) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي $(\varDelta)$، يطلب كتابة معادلته.

ب/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $0.3 < x_1 < 0.4$ و $2.5 < x_2 < 2.6$.

ج/ أنشئ المستقيمين $(\varDelta)$ و (T) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f\left(\frac{1}{\beta}\right) \simeq 2.15$)

5) m عدد حقيقي، h'_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال: $]0;+\infty[$ بـ:

$$h_m(x) = (1-m)x + 2lnx + (lnx)^2$$

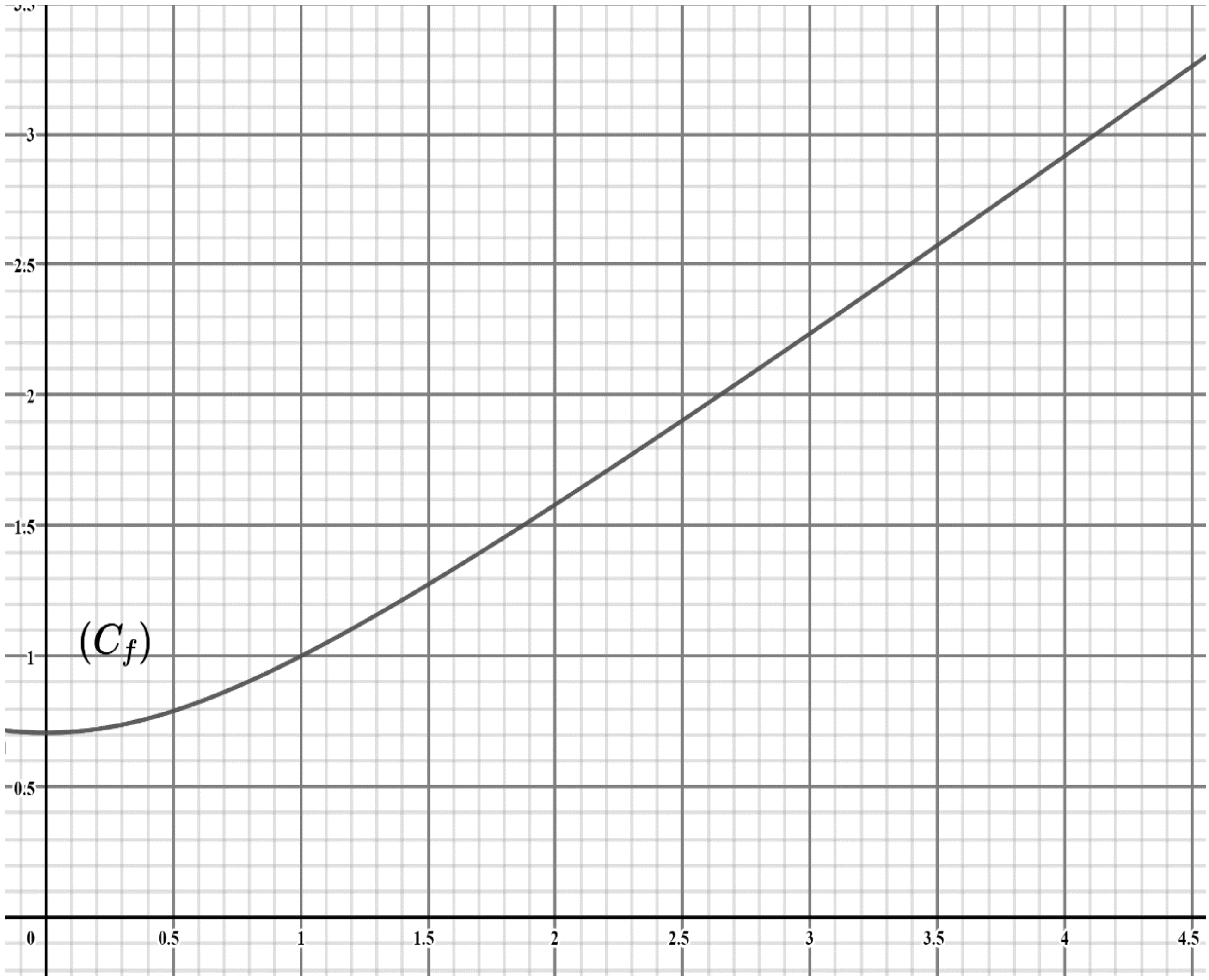
أ/ أحسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m

ب/ باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

.... انتهـــــــــــــى ....

ملاحظة : تعاد الوثيقة مع ورقة الإجابة ولو كانت فارغة

الإسم واللقب : .... القسم : ....



الأستاذ: تونسي ن .... يتمنى لكم التوفيق والنجاح

ثانوية أول نوفمبر 54
بالأغواط

يوم: 2018/12/09
الأستاذ: تونسي ن

3
رياضيات

الرياضيات

تصحيح الاختبار الاول للثلاثي (01)في مادة

التنقيط

التمرين الاول:

01 1) صحيح، التبرير: $2^2 \equiv 1[3]$ أي $2^{2n} \equiv 1[3]$ ومنه $2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$

01 2) خطأ ، التبرير : $2018^{1439} \equiv 2^{1439}[7]$ أي $2018^{1439} \equiv 4[7]$ وذلك بعد دراسة بواقي قسمة 2^n على 7

01 3) خطأ ، التبرير : $\overline{3421}^7 + \overline{1562}^7 = 1240 + 632 = 1872$ و $\overline{5413}^7 = 1921$

01 4) خطأ ، التبرير: $PGCD(21;14) = 7$ و 7 لايقسم 40

5) صحيح ، التبرير : جدول يبيّن باقي قسمة العدد $x^2 - x + 6$ حسب قيم العدد الصحيح x

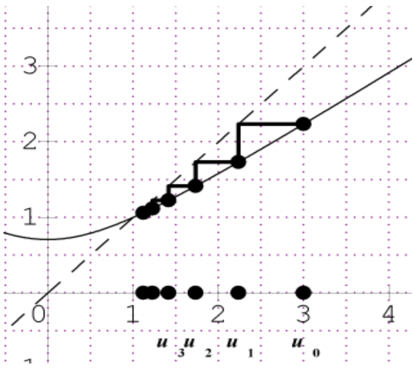
$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$x^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	[9]
$-x \equiv$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	[9]
$x^2 - x + 6 \equiv$	6	8	8	3	0	8	0	3	8	[9]

01

من الجدول نجد أنّ : $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ يكافئ $x \equiv 4[9]$ أو $x \equiv 6[9]$

التمرين الثاني: 1) أ/ $f'(x) = \frac{12}{(x+3)^2} > 0$ ومنه f متزايدة على $[0; +\infty[$

0.5 2) أ/ تمثيل الحدود



0.5 ب / التخمين : (u_n) متناقصة لأنّ $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ ، ومتقاربة نحو 1

0.5 ج/ البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$ ....(p_n)

01 التحقق: (p_0) محققة لأنّ $u_0 = 3 > 1$

نفرض صحة (p_n) أي $u_n > 1$ ونبرهن أن (p_{n+1}) صحيحة أي $u_{n+1} > 1$

لدينا : $u_n > 1$ أي $f(u_n) > f(3)$ " f متزايدة على $[0; +\infty[$ "

ومنه $u_{n+1} > 3$ أي (p_{n+1}) صحيحة ومنه الخاصية (p_n) صحيحة

0.5 د/ لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}-u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}+u_n\right)}{\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}+u_n} = \frac{(1-u_n{}^2)}{2\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{2\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}+u_n}$

0.25 بما ان $u_n > 1$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه متناقصة على $\mathbb{N}$ ، (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل ($u_n > 1$) فهي متقاربة

0.25 ولتكن نهايتها l : $lim u_{n+1} = lim\sqrt{\frac{1+u_n{}^2}{2}}$ يعني أن $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ يكافئ $l^2 = 1$ ومنه $l = 1$

3) أ/ البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0

0.5 0.25 لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1}{}^2 - 1 = \frac{1+u_n{}^2}{2} - 1 = \frac{u_n{}^2-1}{2} = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الاول $v_0 = 8$

0.25 ب/ كتابة v_n و u_n بدلالة n لدينا: $v_n = v_0 \times q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ولدينا $v_n = u_n{}^2 - 1$

0.25 0.25 أي $u_n = \sqrt{v_n + 1}$ ومنه $u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-3}} + 1}$ ،،- حساب النهاية: $\lim u_n = 1$

4) المجاميع: لدينا $v_n = u_n{}^2 - 1$ أي $u_n{}^2 = 1 + v_n$ ومنه $S_n = (1 + v_0) + (1 + v_1) + \cdots + (1 + v_n)$

0.5

$$S_n = (n+1) + v_n\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = (n+1) + 16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

حساب المجموع T_n : لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ومنه $w_n = 2^n v_n = 2^3 = 8$ أي (w_n) متتالية ثابتة

0.5

$$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \cdots + 2^nv_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots w_n = 8(n+1)$$

حساب المجموع L_n: لدينا $v_n = \frac{1}{2^{n-3}}$ ومنه $k_n = ln(v_n) = (3-n)ln2$ أي (k_n) حسابية أساسها $ln2$

$$L_n = ln(v_0) + ln(v_1) + \cdots + ln(v_n) = k_0 + k_1 + \cdots + k_n$$

0.5 $$L_n=\frac{n+1}{2}(k_0+k_1)=\frac{n+1}{2}(3ln2+(3-n)ln2)=\frac{(n+1)(6-n)ln2}{2}$$

التمرين الثالث: الجزء الأول : تحديد وضعية (γ) بالنسبة إلى (φ) على $]0;+\infty[$:

0.5 على المجال : $]0;\beta[$ (φ) تحت (γ) ، وعلى المجال : $]\beta;+\infty[$ (φ) فوق (γ)

0.5 – اشارة $g(x)$

x	0		β		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

0.25 الجزء الثاني : / أ)حساب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=-\infty$

0.5

/ أ*اثبات انه من أجل كل x من D_f: $f'(x)=\frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}$ الدالةfقابلة الاشتقاق على D_f و دالتها المشتقة f' حيث

0.5 $$f'(x)=-1+\left[\frac{-2}{x^2}(1+ln\,x)+\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}\right]=-\frac{(x^2+2\,ln\,x)}{x^2}=\frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}$$

0.5

0.25 ب/ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\frac{\beta h+1}{\beta})-f(\frac{1}{\beta})}{h}=f'\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{-g(\frac{1}{\beta})}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2}=0$ التفسير : (C_f) يقبل مماسا عند $\frac{1}{\beta}$ يوازي حامل محور الفواصل

ب /استنتاج اتجاه تغير الدالة f: من أجل كل x من D_f

0.5 لدينا : إشارة $f'(x)$هي عكس إشارة $g(\frac{1}{x})$ وهي :

x	0		$\frac{1}{\beta}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

0.5 الدالة f متزايدة على المجال $\left]0;\frac{1}{\beta}\right]$ ومتناقصة على المجال $\left[\frac{1}{\beta};+\infty\right[$

* جدول تغيرات الدالةf :

x	0		$1/B$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(1/B)$	↘	$-\infty$

ب) نبين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا$(\varDelta)$ معادلته$y=-x+1$ عند $+\infty$:

0.5 $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}(1+ln\,x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x}+\frac{ln\,x}{x}\right]=0$$

ج) دراسة وضعية المنحنى(C_f) بالنسبة لـ $(\varDelta)$:

لدينا $[f(x)-(-x+1)]=\frac{2}{x}(\ 1\ +ln\,x)$ و منه إشارة الفرق هي من إشارة $(1+ln\,x)$ وهي :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$1+ln x$		$-$	0	$+$	

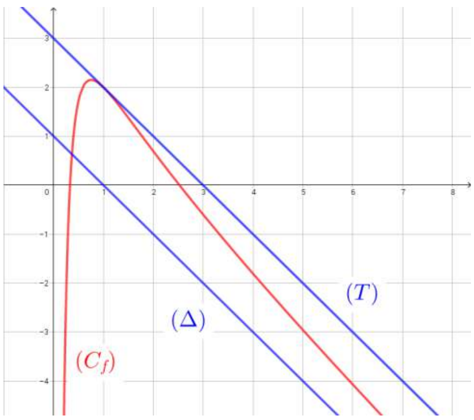
0.5 إذن:(C_f) يقع فوق$(\varDelta)$ على$\left]\frac{1}{e}\ ;+\infty\right[$ وتحت$(\varDelta)$على المجال $\left]0\ ;\frac{1}{e}\right[$ و(C_f) يقطع $(\varDelta)$ في النقطة ذات الإحداثيات $\left(\frac{1}{e};\frac{-1+e}{e}\right)$.

أ/* نبين أن (C_f) يقبل مماس(T) يوازي$(\varDelta)$: نحل المعادلة $f'(x)=-1$ معناه $\frac{-g(\frac{1}{x})}{x^2}=-1$ معناه $x^2+2\,ln\,x=x^2$

0.75 ومنه $ln\,x=0$ ومنه$x=1$ إذن المنحنى(C_f) يقبل مماسا(T) يوازي$(\varDelta)$عند النقطة ذات الفاصلة$x=1$ معادلته$y=-x+3$

01.5 ب/ " باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نبيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_1وx_2 حيث $0.3<x_1<0.4$ و $2.5<x_2<2.6$.

ج/ التمثيل البياني:



01 5) أ/ $h'_m(x)=1-m+\frac{2}{x}+\frac{2lnx}{x}$

ب/ المناقشة البيانية المعادلة $h'_m(x)=0$

0.25 تكافئ $m=1+\frac{2}{x}(1+ln\,x)$ أي أن $m=f(x)+x$ ومنه

$f(x)=-x+m$حلولها هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات

ذات المعادلة : $y=-x+m$ الموازية لـ(T)و$(\varDelta)$ ومنه نجد:

0.5
- ✓ إذا $m\le1$ فإن للمعادلة حل وحيد
- ✓ إذا $1<m<3$ فإن للمعادلة حلان
- ✓ إذا $m=3$ فإن للمعادلةحل وحيد
- إذا $m>3$ فإن المعادلة ليس لها حل

الأستاذ: تونسي ن يتمنى لكم التوفيق والنجاح