

التمرين الاول : (08 ن)

الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ : $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}$

(C_g) : التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ ، ثم استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادله له .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty; 0[$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-3.2 < \alpha < -3.1$

4. أنشئ (C_g) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5. حل و ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $g(x) = m$

التمرين الثاني : (12 ن)

I. f الدالة العددية المعرفة على المجال $]2; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln(x-1) + x-1}{\ln(x-1)}$

(C_f) : التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. استنتج انه من اجل كل x من $]2; +\infty[$ فان : $f(x) \geq e+1$

4. أنشئ (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ على المجال $]2; 10[$

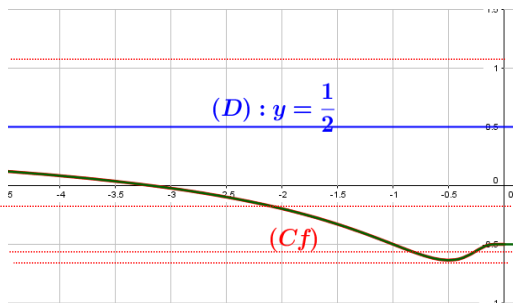
II. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الاول $u_0 = e^2 + 1$ ومن اجل كل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. برهن بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان: $u_n \geq e+1$

2. أ) بين انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - \ln(u_n - 1))}{\ln(u_n - 1)}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية العددية (u_n) .

ج) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

العلامة		الاجابة النموذجية	محاور الموضوع																						
المجموع	مجزاة																								
08	1.5	<p>.....: <u>التمرين الاول</u> :</p> <p>1. حساب النهايات واستنتاج أن (C_g) يقبل مستقيم مقارب (Δ) مع تعيين معادلة له :.....</p> $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ <p>لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ ومنه نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}$ مقارب أفقي لـ (C_f) عند $-\infty$</p>	الدوال العديدية																						
	2.5	<p>2.دراسة اتجاه تغير الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها :.....</p> <p>(ا) دراسة اتجاه تغير الدالة g</p> <p>• حساب $g'(x)$: $g'(x) = -\left(\frac{2x+1}{x}\right)\frac{e^x}{x^2}$</p> <p>• دراسة إشارة $g'(x)$: لدينا إشارة $g'(x)$ من إشارة المقدم $2x+1$ على $0; -\infty$] ومنه نجد :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>0</td> <td>$-\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td> </td> </tr> </table> <p>(ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة g</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$-\frac{2+e^2}{2e^2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\infty$	$g'(x)$	-	0	+		x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2+e^2}{2e^2}$	$\frac{1}{2}$	
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\infty$																					
$g'(x)$	-	0	+																						
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0																						
$g'(x)$	-	0	+																						
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2+e^2}{2e^2}$	$\frac{1}{2}$																						
	1.5	<p>3. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :.....</p> <p>لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-3.2; -3.1]$ و $g(-3.2) \times g(-3.1) < 0$</p> <p>إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث α من $]-3.2; -3.1[$</p>																							
	1.5	<p>4. إنشاء (C_g) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$:</p> 																							
		<p>5. المناقشة البيانية ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة ، $g(x) = m$:.....</p>																							

1

فواصل نقاط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ هي حلول للمعادلة $g(x) = m$

m	$m < -\frac{2+e^2}{2e^2}$	$m = -\frac{2+e^2}{2e^2}$	$-\frac{2+e^2}{2e^2} < m \leq -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$	$m \geq \frac{1}{2}$
المنطقة البيانية	لا يوجد حلول	يوجد حل مضاعف	يوجد حلين	يوجد حل واحد	يوجد حلين موجبيين

12

1

التمرين الثاني:
I.

1. حساب: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty ، \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2.5

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f على $]2; +\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

حساب $f'(x)$: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2; +\infty[$ و : $f'(x) = \frac{\ln(x-1) - 1}{\ln(x-1)}$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة المقدار $\ln(x-1) - 1$ على المجال $]2; +\infty[$

ومنه نجد :

x	0	$e+1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2; e+1[$ ، الدالة f متزايدة تماما على المجال $[e+1; +\infty[$

• تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $]2; +\infty[$

x	0	$e+1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$e+1$	$+\infty$

1

3. استنتاج انه من اجل كل x من المجال $]2; +\infty[$ فان $f(x) \geq e+1$:

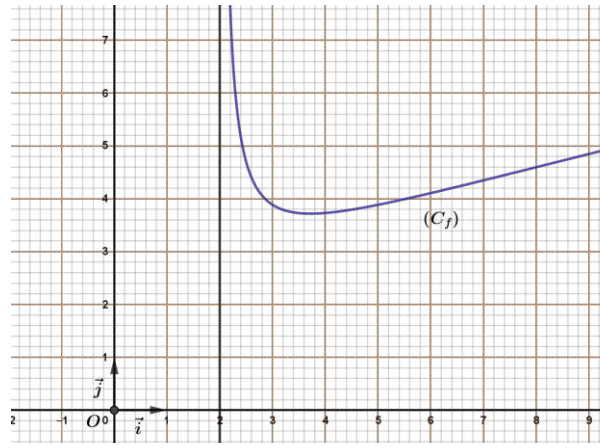
من جدول تغيرات الدالة f نستنتج ان الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها $f(e+1) = e+1$ على المجال $]2; +\infty[$

ومنه من اجل كل x من المجال $]2; +\infty[$ فان $f(x) \geq e+1$

1.5

4. أنشئ (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ على المجال $]2; 10[$:

الدوال
العدديةالمتتاليات
العددية



.II

2: $u_n \geq e+1$ فان \mathbb{N} من اجل كل n من \mathbb{N} برهان بالتراجع انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان $u_n \geq e+1$

المرحلة الاولى : من اجل $n=0$ لدينا $u_0 = e^2 + 1 > 0$

المرحلة الثانية (الوراثية) : لتفرض انه من اجل كل عدد طبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$ فان $u_k \geq e+1$

وبما ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[e+1; +\infty[$ فان $f(u_k) \geq f(e+1) = e+1$

منه نجد ان : $u_{k+1} \geq e+1$

اي من اجل كل n من \mathbb{N} : $u_n \geq e+1$

1: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - \ln(u_n - 1))}{\ln(u_n - 1)}$ (أ) تبين انه من اجل كل n من \mathbb{N} فان:

1: (u_n) المتتالية العددية (ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية العددية

لدينا من اجل كل n من \mathbb{N} إشارة $u_{n+1} - u_n$ من إشارة المقدار $1 - \ln(u_n - 1)$ وبما ان $1 - \ln(u_n - 1) \leq 0$

فان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ومنه من اجل كل n من \mathbb{N} المتتالية العددية (u_n) متناقصة

2: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مع حساب u_n متقاربة، مع حساب u_n (ج) استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة، مع حساب u_n

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فانها متقاربة أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ، $l \in \mathbb{R}$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ومنه فان : (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

ولنا : (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n - 1) + x - 1}{\ln(u_n - 1)} = \frac{\ln(l - 1) + l - 1}{\ln(l - 1)}$

بما ان النهاية ان وجدت فهي وحيدة ، اذن بمطابقة (1) مع (2) نجد ان : $(l - 1)(1 - \ln(l - 1)) = 0$

معناه ان : $(l = e + 1$ او $l = 1)$

اذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e + 1$