

### اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

#### التمرين الأول (06 نقط) :

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج
01	في مستو منسوب إلى معلم متعامد المنحنى البياني للدالة $f$ المعرفة على $\{1\} - \square$ ب: $f(x) = x^2 - 2x - \ln(x-1)^2$ يقبل محور تناظر معادلته :	$x = 1$	$x = -1$	$x = 2$
02	إذا كانت $f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\square$ : $f'(x) = \frac{1}{x^2+3}$ و $h$ دالة معرفة على $\square$ ب: فإن $h(x) = f(3x)$	$h'(x) = \frac{1}{x^2+3}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2+3}$	$h'(x) = \frac{1}{3x^2+1}$
03	$f$ حلا في $\square$ للمعادلة التفاضلية : $y' + 6y - 2 = 0$ و $(C)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، المنحنى $(C)$ يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا معادلته :	$y = -\frac{1}{3}$	$y = \frac{1}{3}$	$y = -\frac{1}{2}$

#### التمرين الثاني (07 نقاط) :

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  ب:  $f(x) = x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$   
( $C_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الوثيقة المرفقة.

1/\* بقراءة بيانية: شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $I$ .

2/\*  $g$  دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = -x + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$

( $C_g$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أ) أحسب نهاية الدالة  $g$  عند  $+\infty$ .

ب) بين أن المستقيم ذي المعادلة  $y = -x + 2$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ( $C_g$ ) بجوار  $+\infty$ .

ج) أدرس تغيرات الدالة  $g$ .

(II) دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي :  $k(x) = -|x| + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$

( $C_k$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

1/\* أ) أحسب :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ،  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ، ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

2/\* أكتب معادلتى المماسين ( $\Delta_1$ ) و ( $\Delta_2$ ) للمنحنى ( $C_k$ ) في النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  .

3/\* أنشئ ( $\Delta_1$ ) ، ( $\Delta_2$ ) و ( $C_k$ ) . (( الإنشاء على الوثيقة المرفقة تعاد مع ورقة الإجابة ))

### التمرين الثالث ( 07 نقاط ):

(I) الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 + 2 \ln x$  .

1 / ادرس تغيرات الدالة  $g$  .

2 / بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  حيث :  $0.75 < \beta < 0.76$

\*\* استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  .

(II) نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x)$  .

نسمي ( $C_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس ( $O; \vec{i}; \vec{j}$ ) .

1) أحسب :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

ب) 1/\* بين أن المستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة :  $y = -x + 1$  مقارب مائل للمنحنى ( $C_f$ ) عند  $+\infty$  .

ج) 1/\* ادرس وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة إلى المستقيم ( $\Delta$ ) .

2) أ) 1/\* أثبت أنه من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$  .

ب) 1/\* استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  وشكل جدول تغيراتها .

3) أ) 1/\* بين أن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماساً ( $T$ ) يوازي ( $\Delta$ ) ، يطلب كتابة معادلته .

ب) 1/\* أنشئ المستقيمين ( $\Delta$ ) و ( $T$ ) والمنحنى ( $C_f$ ) .

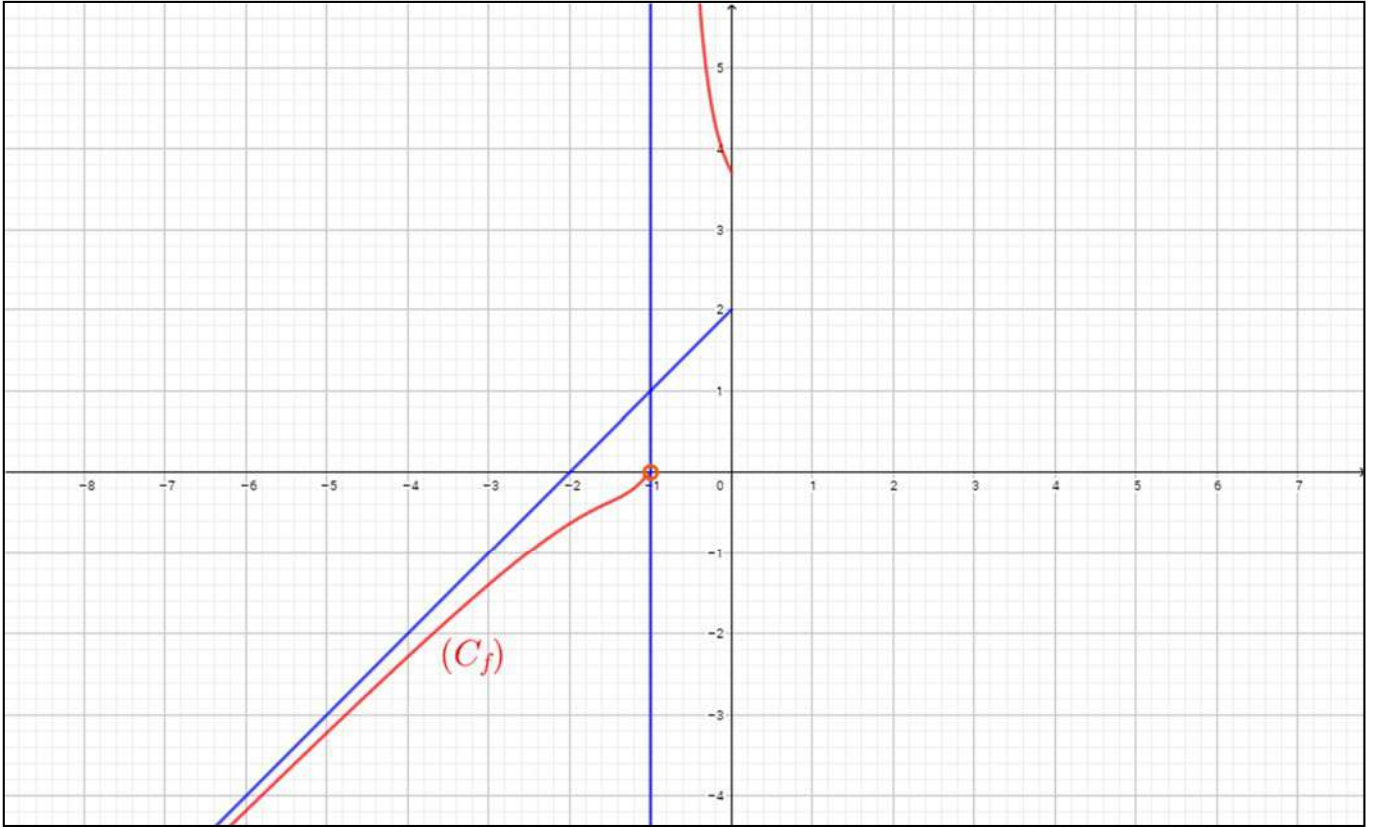
4)  $m$  عدد حقيقي ، عين قيم العدد الحقيقي  $m$  حتى تقبل المعادلة :  $(E) \dots - mx + 2 + 2 \ln x = 0$

حليين مختلفين موجبيين .

الوثيقة المرفقة:

الإسم و اللقب :

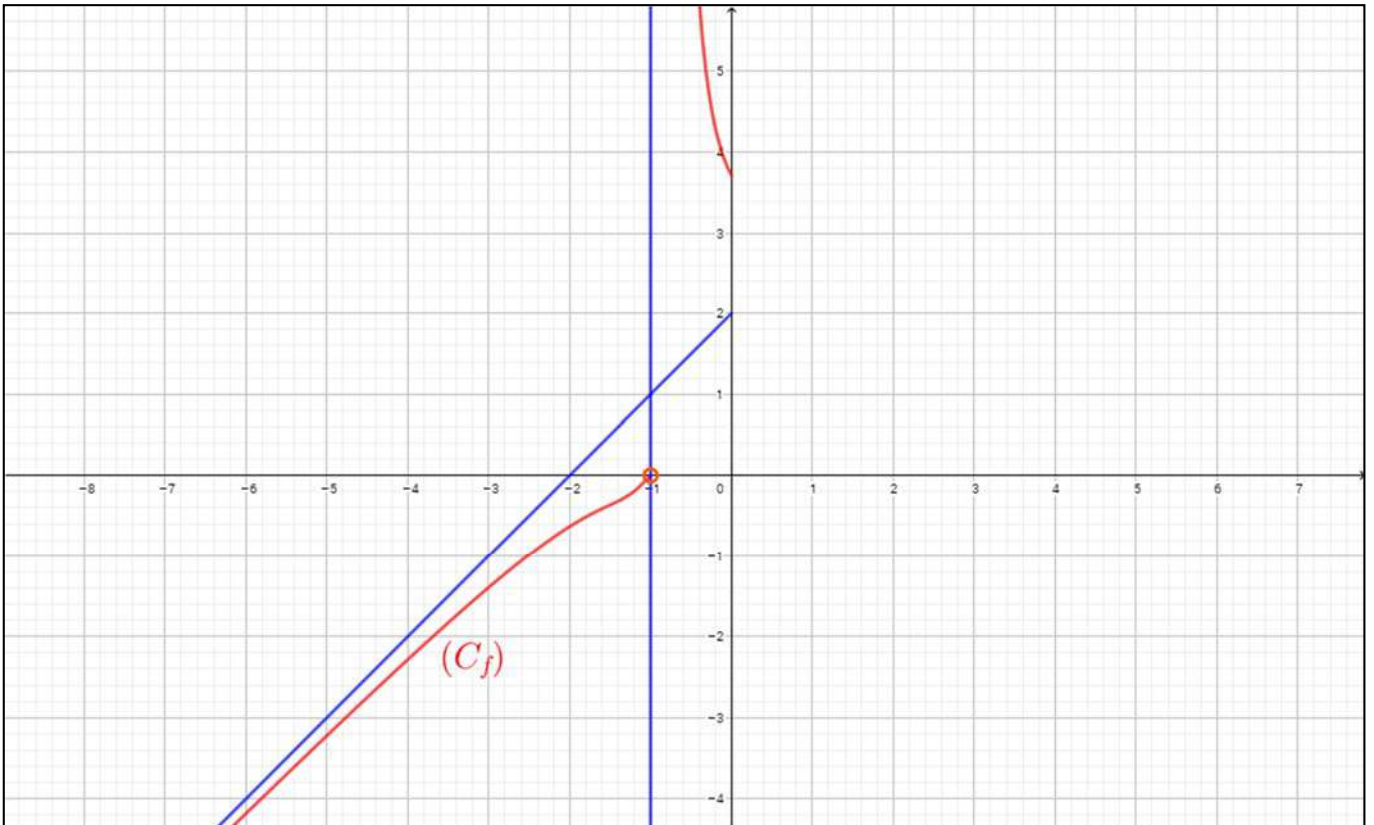
القسم : .....



الوثيقة المرفقة:

الإسم و اللقب :

القسم : .....



## تصحيح اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

## التمرين الأول:

سؤال 1	سؤال 2	سؤال 3
أ	ج	ب

## التبرير:

**1** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $(1+x) \in \mathbb{R} - \{1\}$  فإن:  $(1-x) \in \mathbb{R} - \{1\}$  ، نبين أن:  $f(1+x) = f(1-x)$   
 $f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) - \ln(1-x-1)^2$   
 $= 1 - 2x + x^2 - 2 + 2x - \ln x^2 = x^2 - 1 - \ln x^2 \dots \dots \dots (1)$   
 $f(1+x) = (1+x)^2 - 2(1+x) - \ln(1+x-1)^2 = x^2 - 1 - \ln x^2 \dots (2)$   
من (1) و (2) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة  $x=1$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$   
**2** لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$h'(x) = [f(3x)]' = 3f'(3x) = 3 \left( \frac{1}{(3x)^2 + 3} \right) = \frac{1}{3x^2 + 1}$   
**3**  $y' + 6y - 2 = 0$  تكافئ  $y' = -6y + 2$  ، حلول المعادلة التفاضلية  $y' = -6y + 2$  في  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $y$  حيث  
 $y = ce^{-6x} + \frac{1}{3}$  مع  $c$  ثابت حقيقي.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ce^{-6x} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

## التمرين الثاني:

$I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  ،  $f(x) = x + 1 + e^{x+1}$  ( $I$ )

1/ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$e+1$

$D_g = [0; +\infty[$  ،  $g(x) = -x + 1 + e^{x+1}$  /2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + e^{x+1}) = -\infty$  ( $I$ )

**ب** نبين أن المستقيم ذي المعادلة  $y = -x + 2$  هو

مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_g)$  بجوار  $+\infty$ : لدينا:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + e^{x+1}) = 0$  ومنه

ج- دراسة تغيرات الدالة  $g$ :

دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $[0; +\infty[$ :  $g$  تقبل الاشتقاق

على  $[0; +\infty[$  ودالتها المشتقة  $g'$ :  $g'(x) = -\left(1 + \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$ :  $g'(x) < 0$  ومنه الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $[0; +\infty[$

$x$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$1+e$	$-\infty$

## جدول التغيرات:

$D_k = \mathbb{R} - \{-1\}$  ،  $k(x) = -|x| + 1 + e^{\frac{1}{x+1}}$  ( $II$ )

**أ/1** حساب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  و  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + 1 + e^{\frac{1}{h+1}} - 1 - e}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{e^{\frac{1}{h+1}} - e}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( -1 + \frac{e \left( e^{-1} e^{\frac{1}{h+1} - 1} - 1 \right)}{h} \right)$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( -1 + \left( \frac{-h}{e^{h+1} - 1} \right) \times \frac{-e}{h+1} \right) = -1 - e$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h + 1 + e^{\frac{1}{h+1}} - 1 - e}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{e^{\frac{1}{h+1}} - 1}{-h} \times \frac{-e}{h+1} \right) = 1 - e$

**الاستنتاج:** لدينا:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h) - k(0)}{h}$

إذن: الدالة  $k$  لا تقبل الاشتقاق في  $0$ .

**ب** التفسير الهندسي: بمأن الدالة  $k$  قابلة للاشتقاق في  $0$  من

اليمين وقابلة للاشتقاق في  $0$  من اليسار فإن منحنى الدالة  $k$

يقبل نصفي مماسين في النقطة التي فاصلتها  $0$  ومنه

هي نقطة زاوية.  $A(0; e+1)$

**2** كتابة معادلتى نصفي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  للمنحنى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x}(1+\ln x) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

**ج) دراسة وضعية المنحنى ( $C_f$ ) بالنسبة لـ ( $\Delta$ ):**

لدينا  $[f(x) - (-x+1)] = \frac{2}{x}(1+\ln x)$  ومنه إشارة

$x$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1+\ln x$	-	0	+

الفرق هي من إشارة  $(1+\ln x)$  وهي :  $\frac{1}{e}; +\infty$  ] إن: ( $C_f$ ) يقع فوق ( $\Delta$ ) على

وتحت ( $\Delta$ ) على المجال  $0; \frac{1}{e}$  ] و ( $C_f$ ) يقطع ( $\Delta$ ) في النقطة ذات الإحداثيات  $\left( \frac{1}{e}; \frac{-1+e}{e} \right)$ .

**2/ أثبات انه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  :  $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$**

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $D_f$  و دالتها المشتقة  $f'$  حيث

$$f'(x) = -1 + \left[ \frac{-2}{x^2}(1+\ln x) + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} \right] = -\frac{(x^2 + 2\ln x)}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

**ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة  $f$  : من أجل كل  $x$  من  $D_f$**

لدينا : إشارة  $f'(x)$  هي عكس إشارة  $g(x)$  وهي :

$x$	0	$\beta + \infty$
$f'(x)$	+	-

$x$	0	$\beta$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\beta)$	$-\infty$

**\* جدول تغيرات الدالة  $f$  :**

**3/ \* نبين أن ( $C_f$ ) يقبل مماس ( $T$ ) يوازي ( $\Delta$ ):** نحل المعادلة

$$x^2 + 2\ln x = x^2 \text{ معناه } \frac{-g(x)}{x^2} = -1 \text{ معناه } f'(x) = -1$$

ومنه  $\ln x = 0$  ومنه  $x = 1$  إذن المنحنى ( $C_f$ ) يقبل مماسا ( $T$ )

يوازي ( $\Delta$ ) عند النقطة ذات الفاصلة  $x = 1$  معادلته  $y = -x + 3$

**ب\* التمثيل البياني:**

**4/ تعيين  $m$  حتى**

**تقبل المعادلة ( $E$ )**

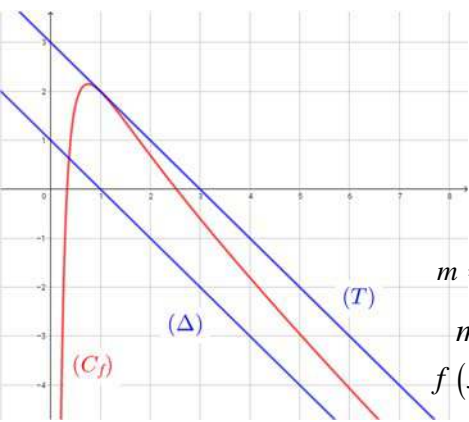
**حليين مختلفين**

**موجبين : ( $E$ )**

$$\text{تكافئ } m = \frac{2}{x}(1+\ln x)$$

$$\text{أي أن } m = f(x) - 1 + x$$

$$\text{ومنه } f(x) = -x + m + 1$$



حلول ( $E$ ) هي فواصل نقاط تقاطع ( $C_f$ ) مع المستقيمات ذات

المعادلة  $y = -x + m + 1$ : الموازية لـ ( $T$ ) و ( $\Delta$ ) ومنه نجد:

المعادلة ( $E$ ) تقبل حليين متمايزين موجبين تماما : من أجل

$$m \in ]0; 2[ \text{ أي } m + 1 \in ]1; 3[$$

( $C_g$ ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند  $+\infty$  معادلته  $y = -x + 2$

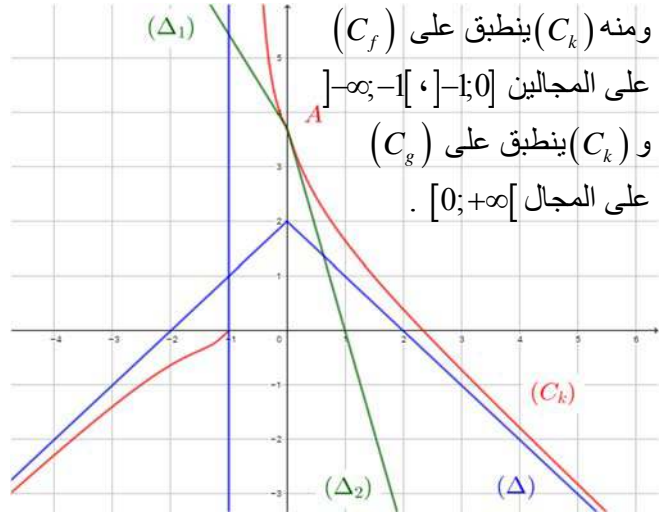
**( $C_k$ ) عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  :**

$$(\Delta_1): y = (1-e)x + e + 1 \quad ; \quad x \leq 0$$

$$(\Delta_2): y = (-1-e)x + e + 1 \quad ; \quad x \geq 0$$

**3/ رسم ( $\Delta_1$ ), ( $\Delta_2$ ) و ( $C_k$ ) :**

لدينا  $\begin{cases} k(x) = f(x) & ; \quad x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \\ k(x) = g(x) & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$



**التمرين الثالث:**

$g$  دالة معرفة على  $]0; +\infty[$  :  $g(x) = x^2 + 2\ln x$

**1/ دراسة تغيرات  $g$  :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

$g^*$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  :  $g'(x) = 2x + \frac{2}{x} > 0$

ومنه الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

**\* جدول التغيرات:**

**2/ تبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\beta$  حيث**

$$0.75 < \beta < 0.76$$

$g$  مستمرة و متزايدة تماما على  $]0; +\infty[$

$]0; +\infty[$  فهي مستمرة و متزايدة تماما على  $]0.75; 0.76[$

$$g(0.75) \approx -0.013 \text{ و } g(0.76) \approx 0.029 \text{ إذن } g(0.75) \times g(0.76) < 0$$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل

حلا وحيدا  $\beta$  حيث  $0.75 < \beta < 0.76$

$x$	0	$\beta + \infty$
$g(x)$	-	+

**3/ إشارة  $g(x)$  على  $]0; +\infty[$  :**

$$D_f = ]0; +\infty[ \text{ ، } f(x) = 1 - x + \frac{2}{x}(1 + \ln x) \quad (H)$$

**1/ أ) حساب نهايتي الدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$  :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

**ب) نبين أن ( $C_f$ ) يقبل مستقيما مقاربا ( $\Delta$ ) معادلته**

	$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -x + 1$
--	--