

# اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المدة: ساعتان

المستوى: ثالثة رياضيات، تقني رياضيات

## التمرين الأول: (6 نقاط)

(1) نعتبر المعادلة (E)  $11x - 7y = 5$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان نسبياً.

(أ) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة (E).

(ب) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر المستقيم (D) ذو المعادلة الديكارتية  $11x - 7y - 5 = 0$ . نرسم  $\Delta$  لمجموعة النقط  $M(x, y)$  من المستوي حيث  $0 \leq x \leq 50$  و  $0 \leq y \leq 70$ .

عين عدد النقط من (D) التي تنتمي إلى  $\Delta$  والتي تكون إحداثياتها أعداداً صحيحة نسبياً.

(2) نعتبر المعادلة (F)  $11x^2 - 7y^2 = 5$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان نسبياً.

(أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  حلاً للمعادلة (F) فإن  $x^2 \equiv 2y^2 [5]$ .

(ب) ليكن  $x$  و  $y$  عددين صحيحين نسبياً. أنقل ثم أتمم الجدولين الآتيين

$x$	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$x^2$						$\equiv [5]$

$y$	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$						$\equiv [5]$

(ج) استنتج أنه إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  حلاً للمعادلة (F) فإن كل من  $x$  و  $y$  مضاعف لـ 5.

(3) أثبت أنه إذا كان كل من  $x$  و  $y$  مضاعف لـ 5 فإن الثنائية  $(x, y)$  ليست حلاً للمعادلة (F).

## التمرين الثاني: (14 نقطة)

I. الجدول الآتي يمثّل جدول تغييرات الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$	

(1) أحسب  $h(1, 84)$ . (تُعطي النتيجة مدوّرة إلى  $10^{-2}$ )

(2) استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

**II.** نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  بـ  $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1)$ .

(1) أحسب نهايات الدالة  $g$  بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون  $g'(x) = \frac{2}{(x^2 - 1)^2} h(x)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم

شكل جدول تغيراتها. (تُعطى  $g(1,84) \simeq 2,41$ )

(3) أثبت أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-2,11 \leq \alpha \leq -2,10$ .

(4) استنتج إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$ .

**III.** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  بـ  $f(x) = e^x \ln(x^2 - 1)$  وليكن  $(C_f)$

تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة على محور الفواصل: 1 cm، الوحدة على محور الترتيب: 6 cm).

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  بجوار أطراف مجموعة تعريفها. فسّر هندسياً النتائج.

(2) أثبت أن  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$ .

(3) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(4) أثبت أن  $f(\alpha) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$  ثم عيّن حصرًا لـ  $f(\alpha)$ .

(5) أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين  $\beta$  و  $\lambda$  حيث  $-1,42 \leq \beta \leq -1,41$  و  $1,41 \leq \lambda \leq 1,42$ .

(6) أرسم المنحنى  $(C_f)$ .

# التصحيح النموذجي

## التمرين الأول:

(1) (أ) لدينا (E) تكافئ  $11x = 7y + 5$  ومنه  $11x \equiv 5[7]$  ومنه  $4x \equiv 5[7]$  ومنه  $4x \equiv 12[7]$  ومنه  $x \equiv 3[7]$  (لأن  $\text{pgcd}(4,12)$  أولي مع 7) ومنه  $x = 7k + 3$  حيث  $k$  عدد صحيح نسبي، وبالتعويض عن قيمة  $x$  في المعادلة (E) نجد أن  $y = 11k + 4$ ، ومنه حلول المعادلة (E) هي الثنائيات  $(7k + 3, 11k + 4)$ .

(ب) لدينا  $0 \leq x \leq 50$  ومنه  $0 \leq 7k + 3 \leq 50$  ومنه  $-0,43 \leq k \leq 6,71$  إذن  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  كذلك  $0 \leq y \leq 70$  ومنه  $0 \leq 11k + 4 \leq 70$  ومنه  $-0,36 \leq k \leq 6$  إذن  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ومنه عدد نقاط المستقيم (D) التي تنتمي إلى  $(\Delta)$  هو 7 نقاط.

(2) (أ) إذا كانت الثنائية  $(x, y)$  حلاً للمعادلة (F) فإن  $11x^2 - 7y^2 = 5$  ومنه  $11x^2 = 7y^2 + 5$  ومنه  $x^2 \equiv 2y^2[5]$ .

(ب) لدينا الجدولان:

$x$	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$x^2$	0	1	4	4	1	$\equiv [5]$

$y$	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$

(ج) لدينا  $x^2 \equiv 2y^2[5]$  تكافئ  $x^2 - 2y^2 \equiv 0[5]$ ، وعليه يكون لدينا الجدول الآتي

		بواقي قسمة $2y^2$ على 5						
		$y$	0	1	2	3	4	$\equiv [5]$
		$2y^2$	0	2	3	3	2	$\equiv [5]$
بواقي قسمة $x^2$ على 5	$x$	$x^2$						
	0	0	0	3	2	2	3	$\equiv [5]$
	1	1	1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	2	4	4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	3	4	4	2	1	1	2	$\equiv [5]$
	4	1	1	4	3	3	4	$\equiv [5]$
	$\equiv [5]$	$\equiv [5]$						

من خلال الجدول نجد أن  $x \equiv 0[5]$  و  $y \equiv 0[5]$ ، وعليه يكون كل من  $x$  و  $y$  مضاعف للعدد 5.

(3) نرض أن كل من  $x$  و  $y$  مضاعف للعدد 5، أي أنه يوجد عدنان صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$  حيث  $x = 5\alpha$  و  $y = 5\beta$ ، ومنه بالتعويض في المعادلة (F) نجد أن  $5(11\alpha^2 - 7\beta^2) = 1$  وهي معادلة لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{Z}^2$ ، إذن الثنائية  $(x, y)$  ليست حلاً للمعادلة (F) عندما يكون كل من  $x$  و  $y$  مضاعف للعدد 5.

## التَّمرين الثاني:

I. (1) لدينا  $h(1,84) = 0$ .

(2) إشارة  $h(x)$  موضحة في الجدول

$x$	$-\infty$	1,84	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

II. (1) نهاية الدالة  $g$  بجوار  $-\infty$  هي  $+\infty$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة  $g$  بجوار  $+\infty$  هي  $+\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة  $g$  بجوار  $-1$  هي  $-\infty$   $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = -\infty$

نهاية الدالة  $g$  بجوار  $1$  هي  $+\infty$   $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = +\infty$

(2) الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  ودالتها المشتقة

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2(x^3 - x^2 - x - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2}{(x^2 - 1)^2} h(x)$$

أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $1$  و  $-1$  فإن إشارة  $g'(x)$  من إشارة  $h(x)$ ، ومنه الدالة  $g$  متزايدة تماماً على

$]-\infty, -1[ \cup ]1, 82[$  وتناقصة تماماً على  $]-\infty, -1[ \cup ]1, 82[$ ، وجدول تغيراتها هو

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	1,82	$+\infty$
$g'(x)$	-			-	+
$g(x)$	$+\infty$			$+\infty$	$+\infty$

(3) الدالة  $g$  مستمرة ورتيبة تماماً على  $[-2,11; -2,10]$  و  $g(-2,10) \times g(-2,11) < 0$ ، إذن، حسب مبرهنة القيم

المتوسطة، المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-2,11 \leq \alpha \leq -2,10$ .

(4) إشارة  $g(x)$  موضحة في الجدول

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$-1$	$1$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-		+

III. (1) نهاية الدالة  $f$  بجوار  $-\infty$  هي  $0$   $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)e^x \times \frac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 0$

المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مقارب أفقي للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ .

نهاية الدالة  $f$  بجوار  $+\infty$  هي  $+\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = +\infty$ .

نهاية الدالة  $f$  بجوار  $-1$  هي  $-\infty$   $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$ .

المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

نهاية الدالة  $f$  بجوار  $1$  هي  $-\infty$   $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$ .

المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مقارب عمودي للمنحنى  $(C_f)$ .

(2) الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  ودالتها المشتقة هي  $f'(x) = g(x) \times e^x$ . بما أن  $e^x > 0$  من

أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $1$  و  $-1$  فإن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ ، أي أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على  $]-\infty, \alpha[ \cup ]1, +\infty[$  ومتناقصة تماماً على  $]-\infty, -1[$  و  $]-1, \alpha[$ .

(3) جدول تغيرات الدالة  $f$  هو

$x$	$-2$	$\alpha$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$		$+$
$f(x)$	$0$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

(4) لدينا  $g(\alpha) = 0$  ومنه  $\ln(x^2 - 1) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}$  ومنه  $f(\alpha) = e^\alpha \ln(\alpha^2 - 1) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$

لدينا، من جهة  $-2,10 \leq \alpha \leq -2,11$  ومنه  $-4,20 \leq 2\alpha \leq -4,22$  وكذلك  $0,121 \leq e^\alpha \leq 0,122$  ومنه  $-0,514 \leq 2\alpha e^\alpha \leq -0,508$  ومن جهة أخرى لدينا  $-2,10 \leq \alpha \leq -2,11$  ومنه  $4,45 \leq \alpha^2 \leq 4,41$  ومنه  $-3,45 \leq 1 - \alpha^2 \leq -3,41$  ومنه  $-0,289 \leq \frac{1}{1 - \alpha^2} \leq -0,293$ ، وعليه نجد أن  $0,146 \leq \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2} \leq 0,151$  ومنه  $0,146 \leq f(\alpha) \leq 0,151$ .

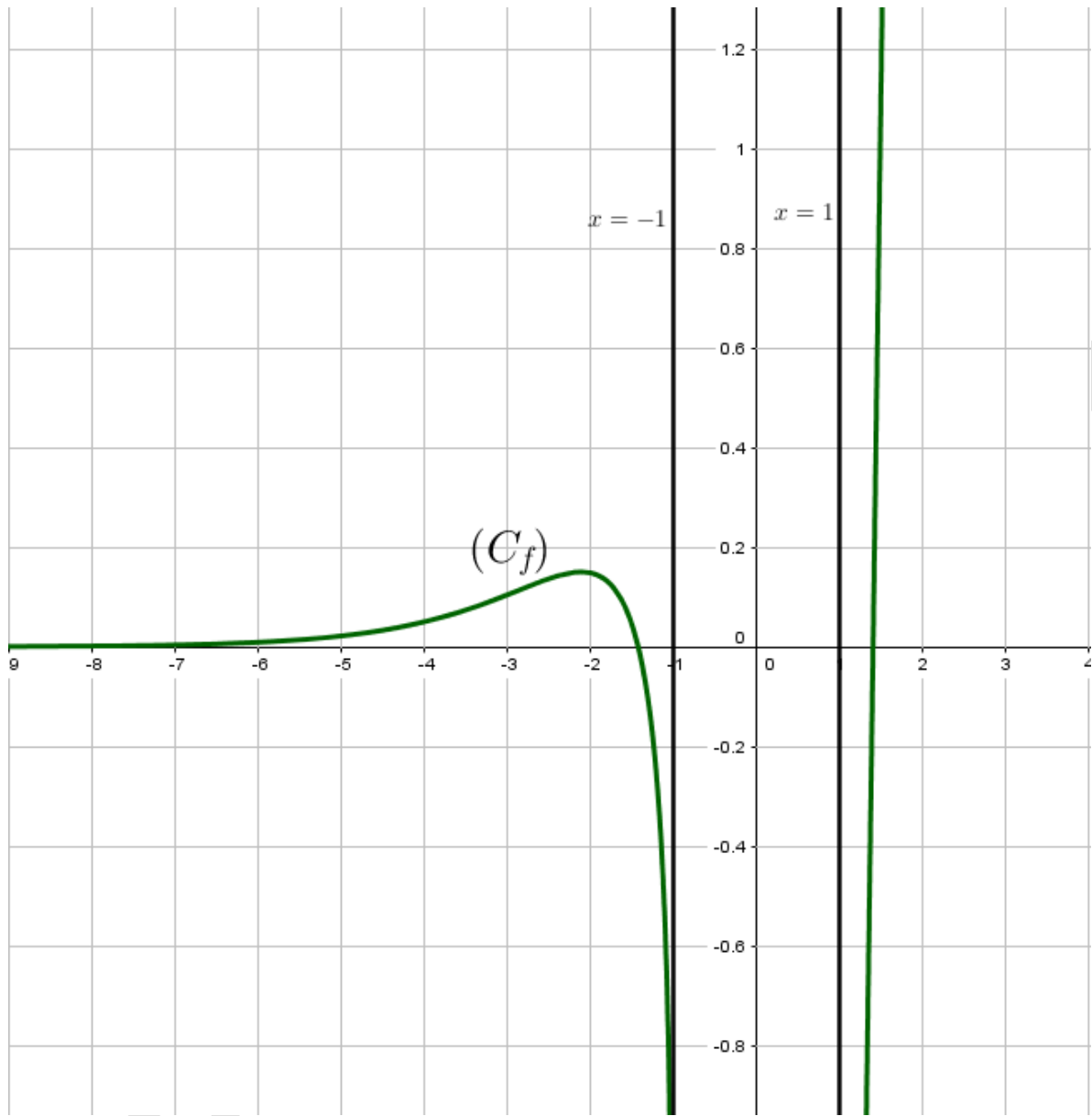
(5) الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة تماماً على المجال  $]-1,42; -1,41[$  و  $f(-1,42) \times f(-1,41) < 0$ ، إذن حسب مبرهنة

القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  ينتمي إلى المجال  $]-1,42; -1,41[$ .

الدالة  $f$  مستمرة ورتيبة تماماً على المجال  $]-1,41; 1,42[$  و  $f(1,42) \times f(1,41) < 0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\lambda$  ينتمي إلى المجال  $]-1,41; 1,42[$ .

(6) التمثيل البياني للدالة  $f$  موضح في الرسم المرفق



عقونبي