

⚠ تجنب الشطب و استعمال المصحح.

النمطين الأول: (04 نقاط)

بين صحة و خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. هما يكن العدد الحقيقي x : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

2. $\ln(3e^\pi) = \pi + \ln 3$

3. الدالة $x \mapsto e^{-2x}$ هي حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$.

4. المتراجحة $e^{1-2x} > e^{x+1}$ لا تقبل حلول \mathbb{R} .

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 4) = 2 \ln 2$

النمطين الثاني: (08 نقاط)

تكن الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي: $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.38, -0.37[$.

3. إستنتج إشارة $g(x)$.

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد

ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$).

1. بين أنه من اجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = g(x)$.

2. أدرس تغيرات الدالة f .

3. بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

4. أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) .

5. بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

6. بين أن: $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

7 أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) (نأخذ $\alpha = -0.375$) .

• (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي .

1 عين m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

2 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$.

النوعين الثالث : (08 نقاط)

• نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$: $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$

1 أدرس اتجاه تغير الدالة g .

2 بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; +\infty[$ ، أحسب $g\left(\frac{3}{2}\right)$ و $g\left(\frac{5}{2}\right)$ ، أعط حصرا

ل α بتقريب $0,1$.

3 إستنتج إشارة $g(x)$ على $[0; +\infty[$.

• نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$, $x > 0$
 $f(0) = 0$

• وليكن (C_f) التمثيل البياني ل f في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 3 \text{ cm}$) .

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

2 إستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ثم أكتب معادلة T المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3 تحقق أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ ، إستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4 أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

5 إستنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

6 بين أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + 1)}$ ثم إستنتج حصرا ل $f(\alpha)$.

7 أنشئ T ثم (C_f) .

8 في نفس المعلم أنشئ (C_h) منحنى الدالة h المعرفة على $] -\infty; 0[$: $h(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

إذا أبرجت أن تبيح بحق، سنبجك ظل بقنا منا، وإذا كنت لا تريد فنبجك عندنا .

أسئلة المذاكرة : مزيان محمد

😊 إذا أردت أن تنجح بحق، ستجد طريقا ما، وإذا كنت لا تريد فستجد عدوا.

النمطين الأول: (04 نقاط)

نبين صحة أو خطأ الجمل مع التعليل :

1 خطأ لأن : $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(e^x - e^{-x})}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2 صحيح لأن : $\ln(3e^\pi) = \ln 3 + \ln e^\pi = \ln 3 + \pi$

3 خطأ لأن : حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي من الشكل : $y = f(x) = ke^{2x}$, حيث k عدد حقيقي كفي.

4 خطأ لأن : المتراجحة $e^{1-2x} > e^{x+1}$ لها الحلول $S = \{] - \infty; 0[\}$

5 صحيح لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 4) = \ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$

النمطين الثاني: (08 نقاط)

نجد الدالة المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^{-x} + 2 \right) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $g'(x) = (2 - x)e^{-x}$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ من نفس إشارة $(2 - x)$ وجدول تغيراتها يعطى بالشكل :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	2

2 إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] - 0.38, - 0.37[$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $] - \infty, 2[$ ومنه على المجال $] - 0.38, - 0.37[$. وبما أن $g(-0.38) \times g(-0.37) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $] - 0.38, - 0.37[$.

3 إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$

1 لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$ ومنه من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = g(x)$

2 دراسة تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$ ولدينا أيضا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3 لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x - 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

4 لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (2x + 1)$ لدينا $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ ومنه فإن إشارة الفرق هي عكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - (2x + 1)$	+		-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

5 إثبات أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف .

لدينا من أجل كل x من \mathbb{R} ، $f''(x) = g'(x)$ ومنه

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

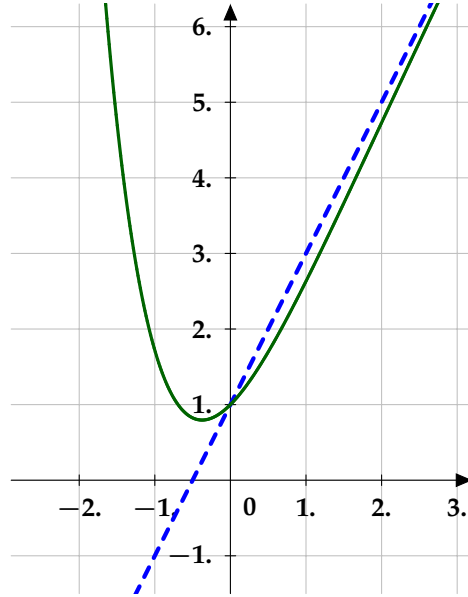
بما أن $f''(x)$ تنعدم مغيرة إشارتها عند 2 فإن النقطة $\left(2; 5 - \frac{2}{e^2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

6 إثبات أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

$$e^{-\alpha} = -\frac{2}{\alpha-1} \text{ تكافئ } g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - e^{-\alpha} = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha-1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha-1} \text{ ومنه:}$$

7 رسم المنحنى (C_f)



المستقيم (Δ_m) معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي

1 تعيين m حتى يكون (Δ_m) مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

المستقيم $y = 2x + m$ مماساً للمنحنى (C_f) في نقطة x_0 منه يعني : $f'(x_0) = 2$ أي أن $g(x) = 2$ ومنه $x_0 = 1$ وبالتالي $(x-1)e^{-x} = 0$

لدينا : $f(1) = 3 - e^{-1}$ ومنه معادلة المماس هي $y = 2x + 1 - e^{-1}$ بالمطابقة نجد $m = 1 - e^{-1}$

2 المناقشة البيانية :

أي $m + 2x = -xe^{-x} + 1 + 2x$ نجد للطرفين نجد $m = -xe^{-x} + 1$ يعني $\frac{x}{e^x} + 1 - m = 0$ أن $m + 2x = f(x)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ، لدينا عندئذ :

• إذا كان $m \in]-\infty, 1 - e^{-1}[$ المعادلة لا تقبل حلولاً .

• إذا كان $m = 1 - e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف .

• إذا كان $m \in]1 - e^{-1}, 1[$ للمعادلة حلان .

• إذا كان $m > 1$ للمعادلة حل وحيد .

التمرين الثالث: (08 نقاط)

• g هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g :

♥ النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

♥ الدالة المشتقة: g تقبل الاشتقاق على $[0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$

أي: $g'(x) = \frac{-2x^2(x-1)}{(x^2+1)^2}$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$	0	$1 - \ln(2)$	$-\infty$

♥ جدول التغيرات:

2 الدالة g معرفة ، مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ و $g(1) = 1 - \ln 2 > 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ أي: $g(1) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0$. إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1; +\infty[$.

♥ إيجاد حصر ل α :

$g(\frac{3}{2}) \times g(\frac{5}{2}) < 0$ ومنه: $g(\frac{5}{2}) = \frac{25}{29} - \ln(\frac{29}{4}) \simeq -0.26$ و $g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{13} - \ln(\frac{13}{4}) \simeq 0.21$

و بما أن $[1; +\infty[\subset]\frac{3}{2}; \frac{5}{2}]$ فإن $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$ ومنه $1.9 < \alpha < 2$

x	1.7	1.8	1.9	2
$g(x)$	0.13	0.08	0.04	-0.01

3 إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	0	+	0

♥ f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ ب:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = 1 \quad 1$$

2 بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ فإن f تقبل الاشتقاق عند 0 ولدينا $f'(0) = 1$

♥ معادلة المماس (T) ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0. $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

ومنه $(T) : y = x$

3 التحقق أنه من أجل كل $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{x} \ln (x^2) \\ &= \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln (x^2 + 1) - \frac{2 \ln x}{x} \quad f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \ln (x^2 + 1) \\ &= \boxed{f(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ و منه } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ حساب } \heartsuit$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot x - \ln(x^2 + 1) = \frac{g(x)}{x^2} : x \in]0, +\infty[\text{ من أجل } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ أن } \text{الاثبات أن} \quad 4$$

5 إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

♥ جدول تغيرات f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

$$6 \text{ الاثبات أن : } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} ; \text{ لدينا : } g(\alpha) = 0 \text{ أي : } \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1} - \ln(\alpha^2 + 1) = 0$$

$$\text{ و منه : } \ln(\alpha^2 + 1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \text{ و بالتالي : } \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$$

♥ حصر $f(\alpha)$: لدينا: $1.9 < \alpha < 2$ و منه: $3.8 < 2\alpha < 4$ و $4.61 < \alpha^2 + 1 < 5$

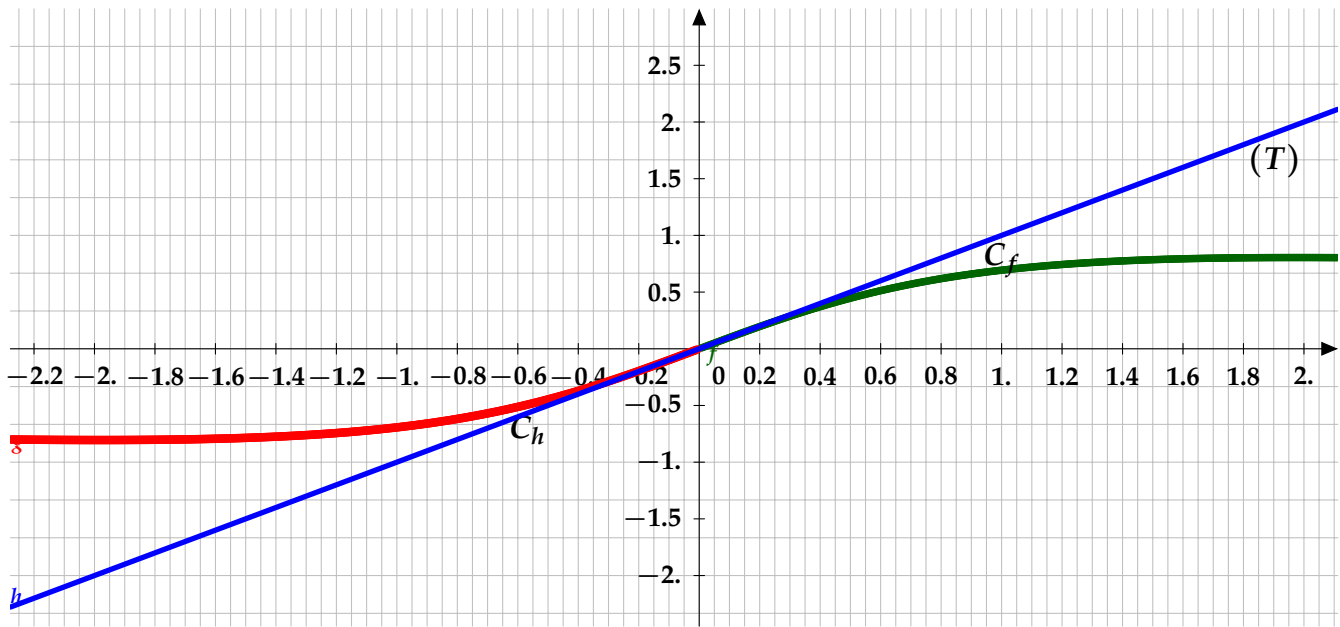
$$\text{ و منه : } \frac{1}{5} < \frac{1}{\alpha^2 + 1} < \frac{1}{4.61} \text{ و بالتالي : } \frac{3.8}{5} < \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} < \frac{4}{4.61} \text{ أي : } 0.76 < f(\alpha) < 0.87$$

7 إنشاء (T) و (C_f)

8 إنشاء (C_h) منحنى الدالة h

$$h(-x) = \frac{\ln((-x)^2 + 1)}{-x} = -\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = -f(x) \text{ ولدينا : إذا كان } x > 0 \text{ فإن } -x < 0$$

ومنه (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة الى مبدأ المعلم.



Bac 2020 Math