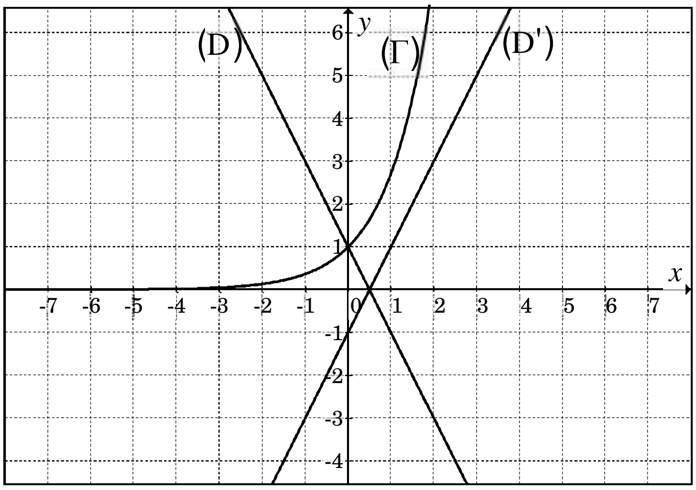
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"** **المادة: رياضيات**	**اختبار** **الفصل الأول**	**الموسم الدراسي: 2023/2022م** **المدة: (2سا 30د)** **إعداد: عبد المطلب** مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة Ecole Erradja wa Tafaouk ÉCOLE PRIVÉE

تمرين 1 (9نقاط)



I- في الشكل المقابل (Γ)، (D) و (D') على الترتيب التمثيلات البيانية للدوال العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto -2x+1$ و $x \mapsto 2x-1$.

u و v الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = e^x + 2x - 1$ و $v(x) = e^x - 2x + 1$.

1) بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x وضعية (Γ) بالنسبة لكل من المستقيمين (D) و (D').

2) استنتج إشارة كل من $u(x)$ و $v(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \dfrac{e^x + 2x - 1}{e^x - 2x + 1}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ، ثم فسّر هاتين النهايتين هندسيا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم (d) ذي المعادلة $y = 1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \dfrac{2(-2x+3)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (اعتبر $f\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 2,6$)

3) أ) احسب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$، ثم فسّر هذه النهاية هندسيا.

ب) اكتب معادلة لـ (Δ) مماس المنحني $(\mathscr{C})$ عند المبدأ O.

4) أ) ارسم المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الرسم $2cm$)

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m $(m \neq 0)$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x) = \dfrac{x}{m}$ ثلاثة حلول متمايزة، أحدهم فقط سالب تماما.

5) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - 2f(x)$.

احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة g.

III- f_k الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = \dfrac{e^x - 2kx + k}{e^x - 2x + 1}$. حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathscr{C}_k)$ تمر من نقطة ثابتة I (مستقلة عن k) يطلب تعيين إحداثيتها.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f_k'(x) = \dfrac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x - 2x + 1)^2}$ ، ثم ادرس اتّجاه تغيّر f_k من أجل $k < 1$ و $k > 1$.

3) عيّن قيمة k_0 التي من أجلها المنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_{k_0})$ متناظران بالنسبة للمستقيم (d)، وارسم $(\mathscr{C}_{k_0})$ في المعلم السابق.

اقلب الورقة

تمرين 2 (8نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) بيّن أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,20<\alpha<2,21$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ ، وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (ضع $t=\sqrt{x}$).

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$، حيث $(\mathscr{C}')$ هو محني الدالة: $x\mapsto\sqrt{x}$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

4) أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 0,01.

ب) بيّن أنّه توجد فاصلة وحيدة x_0 حيث المماس لـ$(\mathscr{C})$ والمماس لـ$(\mathscr{C}')$ عند x_0 متوازيان.

5) أ) أنشئ المماس (Δ) لـ$(\mathscr{C})$ عند 1، والمنحنيين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ في المعلم نفسه.(نأخذ $f(\alpha)\simeq 1,6$)

ب) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، وجود وعدد حلول المعادلة: $f(x)=-x+m^2$.

6) h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\alpha}{2}\right\}$ بـ: $h(x)=f\left(|2x-\alpha|\right)$.

أ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة h على المجال $\left]\dfrac{\alpha}{2};+\infty\right[$.(النهايات غير مطلوبة)

ب) بيّن أنّ $x=\dfrac{\alpha}{2}$ ، هي معادلة لمحور تناظر المنحني الممثل للدالة h ، ثم شكّل جدول تغيرات h.

تمرين 3 (3نقاط)

g الدالة المعرّفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$ ، حيث $f(0)=1$.

نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين: (E) ... $y'-y=0$ و (F) ... $y'-y=-\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$.

1) احسب $g(0)$ ، ثم عيّن عبارة $g(x)$ إذا علمت أنّ g حل للمعادلة التفاضلية (E).

2) عيّن عبارة $f(x)$ ، ثم بيّن أنّ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (F).

3) عيّن الحل h للمعادلة التفاضلية $y'-y=\dfrac{e^x}{(x+1)^2}$ ، إذا علمت أنّ $h(0)=0$.

بالتوفيق

تصحيح اختبار الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

I-1) • $x>0$: (Γ) أعلى (D) ، $x<0$: (Γ) أسفل (D) ؛ (Γ) يقطع (D) عند $A(0;1)$

• (Γ) أعلى (D') من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

2) • $M(x)=e^{x}-(-2x+1)$ (إشارة $M(x)$: $-$ 0 $+$)

• $V(x)=e^{x}-(2x-1)>0$.

II-1) أ)
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{e^x}{x}+2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2+\frac{1}{x}\right)}=-1$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

$y=-1$ معادلة المستقيم المقارب الأفقي بجوار $-\infty$.

$y=1$ معادلة المستقيم المقارب الأفقي بجوار $+\infty$

ب) إشارة: $f(x)-y=f(x)-1=\dfrac{2(2x-1)}{e^x-2x+1}$

من إشارة $(2x-1)$ لأن $e^x-2x+1>0$.

$x>\frac{1}{2}$: (C) أعلى (d). $x<\frac{1}{2}$: (C) أسفل (d). (C) يقطع (d) عند $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:
$$f'(x)=\frac{(e^x+2)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x+2x-1)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{(-4x+6)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

ب) إشارة $f'(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f متزايدة تماما لما $x\leq\frac{3}{2}$ ، ومتناقصة تماما لما $x\geq\frac{3}{2}$.

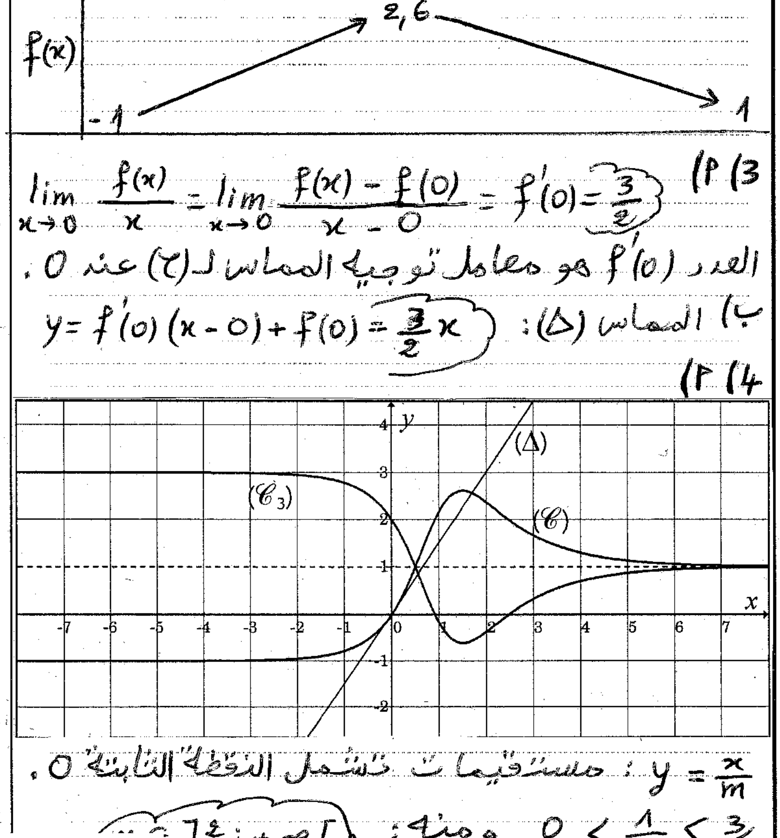
x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$2,6$	↘	1

3) أ)
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{3}{2}$$

العدد $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس لـ (C) عند 0.

ب) المماس (Δ): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x$

4) أ)



مستقيمات: $y=\frac{x}{m}$ تشمل النقطة الثابتة O.

ومنه: $0<\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$: $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$

5)
$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=(-1)^2-2(-1)=3$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=(1)^2-2(1)=-1$$
$$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)-2f'(x)=2f'(x)\left(f(x)-1\right)$$

إشارة $(f(x)-1)$ مذكورة في II-1) ب.

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	↘	-1	↗	$1,6$	↘	-1

III-1) لتكن $I(x_0;y_0)$ نقطة مشتركة لجميع (C_k)
$$y_0=\frac{e^{x_0}+k(-2x_0+1)}{e^{x_0}-2x_0+1}$$
$$k(-2x_0+1)-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0$$
$$\begin{cases}-2x_0+1=0\\-y_0(e^{x_0}-2x_0+1)+e^{x_0}=0\end{cases}$$ ومنه: $I\left(\frac{1}{2};1\right)$

2)
$$f'_k(x)=\frac{(e^x-2k)(e^x-2x+1)-(e^x-2)(e^x-2kx+k)}{(e^x-2x+1)^2}$$
$$f'_k(x)=\frac{e^x(-2x+3+2kx-3k)}{(e^x-2x+1)^2}=\frac{e^x(-2x+3-k(-2x+3))}{(e^x-2x+1)^2}$$
$$f'_k(x)=\frac{(k-1)(2x-3)e^x}{(e^x-2x+1)^2}$$

• $k<1$: إشارة $f'_k(x)$: $+$ $\frac{3}{2}$ $-$

f_k متزايدة تماما على: $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$.

f_k متناقصة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

• $k>1$: إشارة $f'_k(x)$: $-$ $\frac{3}{2}$ $+$

f_k متزايدة تماما على: $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$.

f_k متناقصة تماما على: $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right]$.

لاحظ: لما $k=1$ ، f_k ثابتة.

3) (C) و (C_{k_0}) متناظران بالنسبة لـ (d)

يعني: $\forall x\in\mathbb{R}$ $\dfrac{f(x)+f_{k_0}(x)}{2}=1$
$$\frac{e^x+2x-1}{e^x-2x+1}+\frac{e^x-2k_0x+k_0}{e^x-2x+1}=2$$
$$2e^x+(2-2k_0)x-1+k_0=2e^x-4x+2$$
$$(2-2k_0)x-1+k_0=-4x+2$$
$$\begin{cases}2-2k_0=-4\\-1\ldots\end{cases}$$ ومنه: $k_0=3$

"عبد المطلب"

تمرين 2:

I-1) $\lim_{x\to0^+} g(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

2) $g'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>0$ ،

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$،

$g(2,2)\simeq-0,01<0$ و $g(2,21)\simeq0,003>0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $2,2<\alpha<2,21$.

إشارة $g(x)$: 0 ، α : $-$ ، 0 ، $+$

II-1) $\lim_{x\to0^+} f(x)=0+\infty+\infty=+\infty$ ؛

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(t+\frac{1}{t}-\frac{\ln t^2}{t}\right)$

$=\lim_{t\to+\infty}\left(t+\frac{1}{t}-2\frac{\ln t}{t}\right)=+\infty$

2) أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. لاحظ: $\left(\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

$f'(x)=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-3+\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$: 0 ، α : $-$ ، 0 ، $+$

f متزايدة تماما لما $x\geq\alpha$ و متناقصة تماما $0<x\leq\alpha$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) أ) $f(x)-\sqrt{x}=\frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$: 0 ، e : $+$ ، 0 ، $-$

(C) أسفل (Γ) : $x>e$

(C) أعلى (Γ) : $0<x<e$

(C) يقطع (Γ) عند $A(e;\sqrt{e})$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{2\ln t}{t}\right)=0$

ومنه (Γ) يقارب (C) بجوار $(+\infty)$.

4) أ) $f(\alpha)=\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{\ln\alpha}{\sqrt{\alpha}}$ ولدينا $g(\alpha)=0$ ،

أي $\alpha-3+\ln\alpha=0$ ، $\ln\alpha=3-\alpha$

$f(\alpha)=\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{3-\alpha}{\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{3}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}$

$f(\alpha)=2\sqrt{\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\alpha}}=\frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$

$2,2<\alpha<2,21$ ؛ $1,2<\alpha-1<1,21$ ؛ $2,4<2(\alpha-1)<2,42$

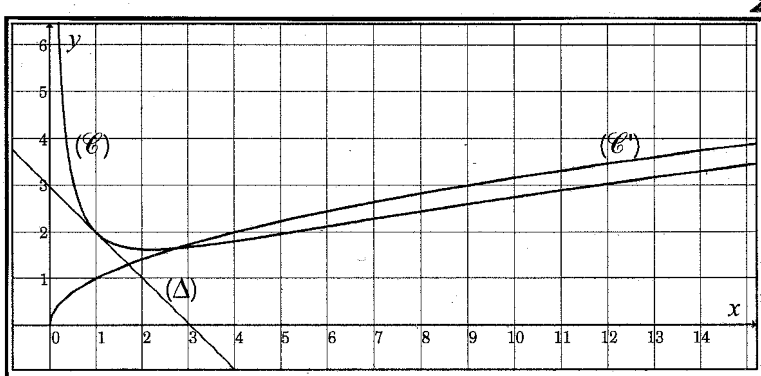
$\sqrt{2,2}<\sqrt{\alpha}<\sqrt{2,21}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2,21}}<\frac{1}{\sqrt{\alpha}}<\frac{1}{\sqrt{2,2}}$ ،

$\frac{2,4}{\sqrt{2,21}}<\frac{2(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}<\frac{2,42}{\sqrt{2,2}}$ ومنه: $1,62<f(\alpha)<1,63$

ب) $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ، $\frac{x_0-3+\ln x_0}{2x_0\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$-3+\ln x_0=0$ ؛ ومنه: $x_0=e^3$

5) أ) (Δ): $y=f'(1)(x-1)+f(1)=-x+3$



ب) حلول هذه المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C) مع مستقيمات موازية لـ (Δ). $m^2<3$ أي $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$ لا يوجد حلول.

$m^2=3$ أي $m=\sqrt{3}$ أو $m=-\sqrt{3}$ يوجد حلا مضاعفا.

$m^2>3$ أي $]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$ يوجد حلان.

6) أ) $x>\frac{\alpha}{2}$: $h(x)=f(2x-\alpha)$ ، $h'(x)=2f'(2x-\alpha)$

$h'(x)=0$ لما $2x-\alpha=\alpha$ ومنه: $x=\alpha$.

$h'(x)>0$ ، $f'(2x-\alpha)>0$ ، $2x-\alpha>\alpha$ ومنه: $x>\alpha$

$h'(x)<0$ ، $f'(2x-\alpha)<0$ ، $0<2x-\alpha<\alpha$ ومنه: $\frac{\alpha}{2}<x<\alpha$

h متزايدة تماما لما $x\geq\alpha$ و متناقصة تماما لما $\frac{\alpha}{2}<x\leq\alpha$

ب) من أجل $x\neq\frac{\alpha}{2}$: $\alpha-x\neq\frac{\alpha}{2}$ و $h(\alpha-x)=h(x)$

$x\neq\frac{\alpha}{2}$ ، $-x\neq-\frac{\alpha}{2}$ ومنه: $\alpha-x\neq\frac{\alpha}{2}$.

$h(\alpha-x)=f(|2(\alpha-x)-\alpha|)=f(|-2x+\alpha|)=f(|2x-\alpha|)=h(x)$

x	$-\infty$		0		$\alpha/2$		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$x=\frac{\alpha}{2}$ محور تناظر يعني $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\alpha}{2}$ ؛ $x_1,x_2\in D_h$

إذا كان $x_1=\alpha$ ، $\frac{\alpha+x_2}{2}=\frac{\alpha}{2}$ ومنه: $x_2=0$.

تمرين 3:

1) $g(x)=(x+1)f(x)$ ومنه: $g(0)=f(0)=1$

حل (E) هو: $x\mapsto Ce^x$ (الحل العام) $C\in\mathbb{R}$

بما أن $g(0)=1$ فإن: $Ce^0=1$ ؛ أي $C=1$

ومنه: $g(x)=e^x$

2) لدينا: $f(x)=\frac{g(x)}{x+1}=\frac{e^x}{x+1}$.

$f'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$

f حل لـ (F) يعني: $f'-f=\frac{-e^x}{(x+1)^2}$.

(تحقق) $f'(x)-f(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}-\frac{e^x}{(x+1)}=\frac{-e^x}{(x+1)^2}$

3) $\begin{cases} h'-h=\frac{e^x}{(x+1)^2} \\ f'-f=-\frac{e^x}{(x+1)^2}\end{cases}$ بالجمع نجد: $(h+f)'-(h+f)=0$ ومنه: $h+f$ حل لـ (E).

$h(x)+f(x)=Ce^x$ إذن: $h(x)=Ce^x-f(x)$

$h(0)=0$ ، $C=1$ ومنه: $h(x)=\frac{xe^x}{x+1}$ "عبد المطلب"