2024 - 2023

الفرض الأول للثلاثي الثاني في الرياضيات

المدة: 01 سا

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (09 نقاط)

a و b عددان طبيعيان حيث: $a = 2018$ و $b = 1924$.

1. عين باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين a و b على 5.
2. استنتج مما سبق، باقي القسمة الاقليدية للعددين $3a + 2b$ و $a^2 + b^2$ على 5.
3. تحقق أن $b \equiv -1[5]$. ثم استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد b^{1962} على 5.
4. عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $a + b^{1962} + n \equiv 0[5]$.

التمرين الثاني: (08 نقاط)

1. ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.
2. عين باقي قسمة العدد 4^{2011} على 7.
3. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $4^{3n} + 2006^{2009} + 4$ يقبل القسمة على 7.
4. عين باقي قسمة العدد A على 7 حيث: $A = 2006^{1430} + 1429^{2011} - 2$.

التمرين الثالث: (03 نقاط)

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، العدد $6^n - 1$ يقبل القسمة على 5.

خليل مطران:

اعزم وكد فإن مضيت فلا تقف	واصبر وثابر فالنجاح محقق
ليس الموفق من تواتيه المُنى	لكن من رزق الثبات موفق

************* الأستاذ: فراحتية المحفوظ *************

حل التمرين الأول

$a=2018$ و $b=1924$

① تعيين باقي قسمة a و b على 5:

$$\begin{array}{r|l} a=2018 & 5 \\ \hline 2015 & 403 \\ 3 & \end{array} \quad a\equiv 3[5]$$ (1)

باقي قسمة a على 5 هو 3

$$\begin{array}{r|l} b=1924 & 5 \\ \hline 1920 & 384 \\ 4 & \end{array} \quad b\equiv 4[5]$$ (1)

باقي قسمة b على 5 هو 4

② استنتاج باقي قسمة $3a+2b$ على 5:

لدينا $a\equiv 3[5]$ إذا $3a\equiv 9[5]$ (2)

ولدينا $b\equiv 4[5]$ إذا $2b\equiv 8[5]$

بالجمع طرفا لطرف نجد $3a+2b\equiv 17[5]$

ولدينا $17\equiv 2[5]$ إذا $3a+2b\equiv 2[5]$

ومنه باقي قسمة $3a+2b$ على 5 هو 2.

• استنتاج باقي قسمة a^2+b^2 على 5:

لدينا $a\equiv 3[5]$ إذا $a^2\equiv 9[5]$ (2)

و $b\equiv 4[5]$ إذا $b^2\equiv 16[5]$

بالجمع طرف لطرف نجد $a^2+b^2\equiv 25[5]$

ولدينا $25\equiv 0[5]$ إذا $a^2+b^2\equiv 0[5]$

ومنه باقي قسمة a^2+b^2 على 5 هو 0.

③ التحقق أن $b\equiv -1[5]$ (1)

لدينا $b\equiv 4[5]$ و $0\equiv 5[5]$

إذن $b\equiv 4-5[5]$ إذا $b\equiv -1[5]$

• استنتاج باقي قسمة b^{1962} على 5:

لدينا $b\equiv -1[5]$ إذا $b^{1962}\equiv (-1)^{1962}[5]$ (1)

ومنه $b^{1962}\equiv 1[5]$

إذن باقي قسمة b^{1962} على 5 هو 1

④ تعيين قيم n التي تحقق

(2) $a+b^{1962}+n\equiv 0[5]$

لدينا $a+b^{1962}+n\equiv 0[5]$

معناه $3+1+n\equiv 0[5]$

معناه $4+n\equiv 0[5]$

معناه $n\equiv -4[5]$ معناه $n\equiv -4+5[5]$

معناه $n\equiv 1[5]$ إذا $n=4k+1$

حيث k عدد طبيعي.

حل التمرين الثاني

① دراسة بواقي قسمة 4^n على 7

نتجا لقيم العدد الطبيعي n:

من أجل $n=0$ نجد $4^0=1\equiv 1[7]$

من أجل $n=1$ نجد $4^1=4\equiv 4[7]$

(3) من أجل $n=2$ نجد $4^2=16\equiv 2[7]$

من أجل $n=3$ نجد $4^3=64\equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 دورية ودورها 3

ونلخص بواقي قسمة 4^n على 7 في جدول تاليا

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$k\in\mathbb{N}$
$4^n\equiv$	1	4	2	[5]

(1)

② باقي قسمة 4^{2011} على 7:

(1) لدينا
$$\begin{array}{r|l} 2011 & 3 \\ \hline 2010 & 670 \\ 1 & \end{array} \quad 2011=3(670)+1$$

إذن $4^{2011}=4^{3(670)+1}\equiv 4[7]$

اذن باقي قسمة 4^{2011} على 7 هو 4

③- اثبات ان $4^{3n}+2006^{2009}+4$ يقبل القسمة على 7 :

- لدينا $4^{3n}\equiv 1[7]$ — ①

ولدينا $\begin{array}{r|l} 2009 & 3 \\ \hline 2007 & 669 \\ 2 & \end{array}$ $2009=3(669)+2$

ولدينا $\begin{array}{r|l} 2006 & 7 \\ \hline 2002 & 286 \\ 4 & \end{array}$

اي $2006\equiv 4[7]$

ومنه $2006^{2009}\equiv 4^{2009}[7]$

$2006^{2009}\equiv 4^{3(669)+2}[7]$

اي $2006^{2009}\equiv 2[7]$ — ②

بالجمع طرف لطرف نجد :

$4^{3n}+2006^{2009}\equiv 3[7]$

اي $4^{3n}+2006^{2009}+4\equiv 7[7]$

اي $4^{3n}+2006^{2009}+4\equiv 0[7]$

ومنه العدد $4^{3}+2006^{2009}+4$ يقبل القسمة على 7 لان الباقي 0.

④- تعيين باقي قسمة A على 7 :

- لدينا $A=2006^{1430}+1429^{2011}-2$

- لدينا $\begin{array}{r|l} 1430 & 3 \\ \hline 1428 & 476 \\ 2 & \end{array}$ $1430=3(476)+2$

اي $2006\equiv 4[7]$

اي $2006^{1430}\equiv 4^{1430}[7]$

اي $2006^{1430}\equiv 4^{3(476)+2}[7]$

اذن $2006^{1430}\equiv 2[7]$ — ③

ولدينا $\begin{array}{r|l} 1429 & 7 \\ \hline 1428 & 204 \\ 1 & \end{array}$ $1429\equiv 1[7]$

اي $1429^{2011}\equiv 1^{2011}[7]$

اي $1429^{2011}\equiv 1[7]$ — ④

جمع ③ مع ④ نجد :

$2006^{1430}+1429^{2011}-2\equiv 2+1-2[7]$

$2006^{1430}+1429^{2011}-2\equiv 1[7]$

اذن باقي قسمة A على 7 هو 1

حل التمرين الثالث :

- البرهان بالتراجع ان العدد 6^n-1 مضاعف لـ 5 .... $P(n)$

- مرحلة ①: التحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من اجل $n=0$

من اجل $n=0$ نجد $6^0-1=1-1=0$

ولدينا 0 يقبل القسمة على 5.

اذن الخاصية $P(n)$ صحيحة من اجل $n=0$

- مرحلة ②: نفرض $P(n)$ صحيحة من اجل $n\in\mathbb{N}$ ونبين صحتها من اجل $n+1$.

- لدينا $6^{n+1}-1=6^n\times 6-1$

$=6^n(5+1)-1$

$=5\times 6^n+6^n-1$

ولدينا حسب فرضية 6^n-1 مضاعفا لـ 5

اي $6^n-1=5k$ $(k\in\mathbb{Z})$ وبالتعويض نجد

$6^{n+1}-1=5\times 6^n+5k=5(6^n+k)$

بوضع $k'=6^n+k$ نجد $6^{n+1}-1=5k'$ $k'\in\mathbb{Z}$

اذن الخاصية محققة من اجل $n+1$.

وحسب البرهان بالتراجع فان 6^n-1 مضاعف لـ 5.