مستوى : ثالثة متوسط (3 م $_{3,2,1}$ - فوج 02 -) — المدة الممنوحة : ساعة ونصف

الفرض المحروس الأوّل للفصل الأوّل في مادة الرياضيات.

السنة الدراسية : 2020-2021 — تاريخ اجتياز الامتحان : 11 جانفي 2021

◄ **ملاحظة هامة !** يؤخذ في الحسبان الدقة في التعبير والكتابة الواضحة.

التمرين الأوّل : (07 نقاط)

■ إليك العبارتين التاليتين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A} = (+0,07) \times (-4,6) \times (-8) \times (-19)$ و $\mathcal{B} = (-100) \times (6,04) \times (-5,87) \times (+0,67)$.

1. أحسب التعابير الموالية : $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ، $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.
2. بدون إجراء أي حساب، عيّن إشارة العبارة $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$.
3. في كل حالة من الحالتين التاليتين، عينّ إشارة العدد t ثمّ استنتج قيمته.

$\mathcal{A} \times t \times (-100) \times 0,1962 = \mathcal{B}$ و $(0,32) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times t \times (-0,9) = -116265,082$.

4. أُنقل وأكمل الجدول التالي :

العدد	مقلوب العدد	معاكس العدد
$\mathcal{A}$		
$\mathcal{B}$		

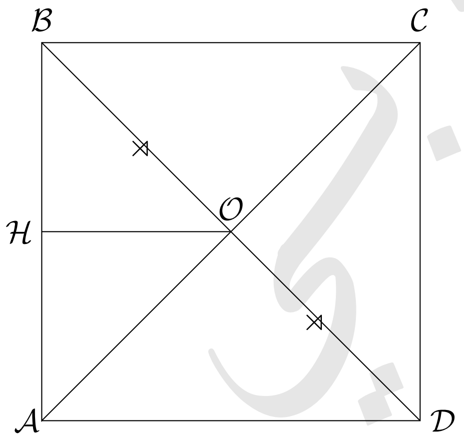
التمرين الثاني : (07 نقاط)

■ لنعرّف الأعداد $\mathcal{F}$ ، $\mathcal{H}$ و $\mathcal{S}$ على النحو التالي : $\mathcal{F} = \dfrac{1}{5}$ ، $\mathcal{H} = \dfrac{2}{3}$ و $\mathcal{S} = \dfrac{-5}{12}$.

1. أُحسب المقادير المواليّة، موضحاً طريقة حلك : $\mathcal{H}+\mathcal{S}$ ، $\mathcal{F}-\mathcal{H}$ ، $\mathcal{H}\times\mathcal{S}$ و $\mathcal{F}\div\mathcal{S}$.
2. قارن بين كل عددين ناطقين، بتوحيد المقام : $-\mathcal{H}$ و $\mathcal{S}$; $\mathcal{F}$ و $\mathcal{H}$.

■ في قائمة الأعداد التالية، تعرّف على الأعداد الطبيعية والأعداد العشرية والأعداد النسبية والأعداد الناطقة: 19، $\dfrac{1}{9}$، $6,47$.

التمرين الثالث : (06 نقاط)



تأمّل الرسم المقابل (الرسم غير مرسوم بالأطوال الحقيقية)، ثم أجب على الأسئلة الموالية :

■ $ABCD$ مربع مركزه النقطة $\mathcal{O}$ ، حيث :

$\mathcal{AB} = \mathcal{BC} = \mathcal{CD} = \mathcal{DA} = 5cm$.

لنفترض أنّ : $(\mathcal{HO})//(\mathcal{AD})$.

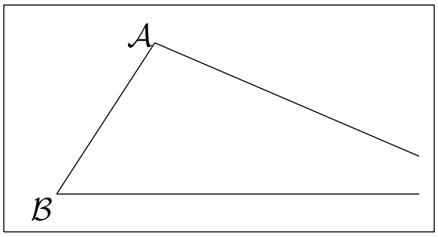
1. كيف تبرّر باستعمال معطيات الشكل المرفق أنّ النقطة $\mathcal{H}$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[\mathcal{AB}]$.
2. بثلاث طرق مختلفة، أثبت أنّ المثلثين $\mathcal{OBC}$ و $\mathcal{ODA}$ متقايسان.
3. أحسب الطول $\mathcal{OH}$.

التمرين الرابع : (03 نقاط إضافية)

تنبيه!!! على الممتحن أن يعالج مشكلا واحدا فقط

◄ **المشكل الأوّل :** ABC مثلث قائم الزواية في A حيث : $AB < AC$.
لتكن D نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$ حيث أنّ : $AD = AB$.
لتكن F نقطة من نصف المستقيم $[BA)$ حيث أنّ : $AF = AC$.
⊡ بيّن أنّ المستقيمين (FD) و (BC) متعامدان.

◄ **المشكل الثاني :** في الشكل المرافق، ABC مثلث، والنقطة C مخفية!.
⊡ دون أن ترسم خارج الإطار، استخدم المسطرة والمدور لرسم النقطة M منتصف $[AC]$ والنقطة N منتصف $[BC]$.



◄ **المشكل الثالث :** ABC مثلث، A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$.
⊡ بيّن أنّ للقطعتين $[B'C']$ و $[A'C']$ نفس المنتصف.

موفقون بإذن الرحمان.

التصحيح التفصيلي للفرض المحروس الأوّل للفصل الأوّل في مادة الرياضيات.

حل التمرين الأوّل : (07 نقاط)

1. حساب العلاقات الموالية : $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ، $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$:

من الأحسن حساب كل عبارة على حدى.

. فائدة غالية : لتحديد إشارة جداء عدّة أعداد عشرية نسبية نحسب عدد عوامله السّالبة، فإذا كان هذا العددُ فرديا، فإنّ الجداء سالب، أمّا إذا كان زوجيا فالجداء يكون موجبا.

لنتأمل معاً - **عزيزي المجتهد** - في $\mathcal{A}$ لوجدنا عدد عوامله السالبة هو 3 وهو عدد فردي، إذن $\mathcal{A}$ عدد سالبٌ.

بنفس الفكرة السابقة، لنتأمل قليلاً في $\mathcal{B}$ لوجدنا عدد عوامله السالبة هو 2 وهو عدد زوجي، إذن $\mathcal{B}$ عدد موجبٌ.

من خلال ما سبق، ينتج لنا :

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &=(-100)\times(6,04)\times(-5,87)\times(+0,67)\\ &=+(100\times 6,04\times 5,87\times 0,67)\\ &=+2375,4716\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &=(+0,07)\times(-4,6)\times(-8)\times(-19)\\ &=-(0,07\times 4,6\times 8\times 19)\\ &=-48,944\end{aligned}$$

بعد انتهاء حساب كل عبارة على حدى، من السهل استنتاج العبارات $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ، $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

لنبدأ على بركة الله في العبارة الأولى.

- **حساب العبارة $\mathcal{A}+\mathcal{B}$:** ⇜ (0,75 ن)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}+\mathcal{B} &=-48,944+2375,4716\\ &=2326,5276\end{aligned}$$

- **حساب العبارة $\mathcal{A}-\mathcal{B}$:** ⇜ (0,75 ن)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}-\mathcal{B} &=(-48,944)-(+2375,4716)\\ &=-2424,4156\end{aligned}$$

- **حساب العبارة $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$:** ⇜ (0,75 ن)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\times\mathcal{B} &=(-48,944)\times(+2375,4716)\\ &=-116265,082\end{aligned}$$

2. بدون إجراء أي حساب، تعيّين إشارة العبارة $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$: ⇜ (0,25 ن)

عملاً بإشارة $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ ينتج لنا إشارة حاصل القسمة $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ سالبة، لأنّ العبارتين السابقين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ مختلفتين في الإشارة.

3. تعيّين إشارة العدد t: ⇜ (0,50 ن)

قبل شرع في حل هذا السؤال، لنسمي المعادلتين كما يلي :

$$\mathcal{A}\times t\times(-100)\times 0,1962=\mathcal{B} \qquad (1)$$

$$(0,32) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times t \times (-0,9) = -116265,082 \qquad (2)$$

واضح وضوح الشمس أنّ إشارة t موجبة هذا في المعادلة (1). ويكون سالباً في المعادلة (2).

$$\mathcal{A} \times t \times (-100) \times 0,1962 = \mathcal{B}$$

$$t = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A} \times (-100) \times 0,1962}$$

$$t = \frac{+2375,4716}{(-48,944) \times (-100) \times 0,1962}$$

$$t = \frac{+2375,4716}{+960,28128}$$

$$t = 2,473724782 \leftarrow (0,50)$$

$$(0,32) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times t \times (-0,9) = -116265,082$$

$$(0,32) \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times t \times (-0,9) = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

$$(0,32) \times t \times (-0,9) = 1$$

$$(-0,288) \times t = 1$$

$$t = \frac{1}{-0,288}$$

$$t = -3,472222222 \quad (0,50) \leftarrow$$

4. إكمال الجدول التالي : ← **(0,75 ن) لكل فراغ**

العدد	مقلوب العدد	معاكس العدد
$\mathcal{A}$	$-\frac{125}{6118}$	$+48,944$
$\mathcal{B}$	$\frac{2500}{5938679}$	$-2375,4716$

حل التمرين الثاني : (07 نقاط)

1. حساب المقادير الموالية : $\mathcal{H}+\mathcal{S}$ ، $\mathcal{F}-\mathcal{H}$ ، $\mathcal{H}\times\mathcal{S}$ و $\mathcal{F}\div\mathcal{S}$:

- **لنحسب المقدار** $\mathcal{H}+\mathcal{S}$: ← **(0,75 ن)**

$\mathcal{H}+\mathcal{S}$ هو مجموع عددين ناطقين مقاماهما مختلفان، وبالتالي نبدأ بالبحث عن مضاعف مشترك للمقامين.
يمكنك -عزيزي الذكي- اختيار 3×12 كمقام مشترك لكن من الأفضل اختيار أصغر مضاعف مشترك غير معدوم للعددين 3 و 12. مضاعفات 3 هي : $\{3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12;\ \cdots\}$. من هذا الأخير نستنتج أنّ :

$$\mathcal{H}+\mathcal{S} = \frac{2}{3} + \frac{-5}{12} = \frac{2\times4}{3\times4} + \frac{-5}{12} = \frac{8}{12} + \frac{-5}{12} = \frac{8-5}{12} = \frac{3}{12}$$

- **لنحسب المقدار** $\mathcal{F}-\mathcal{H}$: ← **(0,75 ن)**

$\mathcal{F}-\mathcal{H}$ هو فرق عددين ناطقين مقاماهما مختلفان، وبالتالي نبدأ بالبحث عن مضاعف مشترك للمقامين.
لكن من الأفضل اختيار أصغر مضاعف مشترك غير معدوم للعددين 3 و 5.
مضاعفات 3 هي : $\{3\ ;\ 6\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ 15\ ;\ 18\ ;\ 21\ \cdots\}$. مضاعفات 5 هي : $\{5\ ;\ 10\ ;\ 15\ ;\ \cdots\}$.

$$\mathcal{F}-\mathcal{H} = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{1\times3}{5\times3} - \frac{2\times5}{3\times5} = \frac{3-10}{15} = -\frac{7}{15}$$

- **لنحسب المقدار** $\mathcal{H}\times\mathcal{S}$: ← **(0,75 ن)**

$$\mathcal{H}\times\mathcal{S} = \frac{2}{3} \times \frac{-5}{12} = \frac{2\times(-5)}{3\times12} = -\frac{10}{36} = -\frac{5}{18}$$

- **لنحسب المقدار** $\mathcal{F}\div\mathcal{S}$: ← **(0,75 ن)**

$$\mathcal{F}\div\mathcal{S} = \frac{1}{5} \div \frac{-5}{12} = \frac{1}{5} \times \frac{12}{-5} = -\frac{1\times12}{5\times5} = -\frac{12}{25}$$

2. المقارنة : ↩ **(0,75 ن لكل عبارة صحيحة)**

لدينا : $\frac{-8}{12} = -\frac{2\times 4}{3\times 4} = -\mathcal{H}$ و $\mathcal{S} = \frac{-5}{12}$. و بما أنّ $-8 < -5$: فإنّ $\frac{-8}{12} < \frac{-5}{12}$ وهذا ما يوحي لنا : $-\mathcal{H} < \mathcal{S}$.

لدينا : $\frac{3}{15} = \frac{1\times 3}{5\times 3} = \frac{1}{5} = \mathcal{F}$ و $\frac{10}{15} = \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{2}{3} = \mathcal{H}$. و بما أنّ : $3 < 10$ وعليه : $\frac{10}{15} < \frac{3}{15}$ إذن : $\mathcal{F} < \mathcal{H}$.

تصنيف الأعداد: ↩ **(02,50 ن)**

- ⊡ **الأعداد الطبيعية :** 19.
- ⊡ **الأعداد العشرية :** $6,47$; 19.
- ⊡ **الأعداد النسبية :** $6,47$; 19.
- ⊡ **الأعداد الناطقة :** $\frac{1}{9}$; $6,47$; 19.

حل التمرين الثالث : **(06 نقاط)**

1. تبرير باستعمال معطيات الشكل المرافق أنّ النقطة $\mathcal{H}$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$: ↩ **(01 ن)**

في المثلث ABD لدينا: $\mathcal{O}$ منتصف $[BD]$ ($\mathcal{O}$ مركز متوازي أضلاع $ABCD$) و $(\mathcal{HO})//(AD)$ (حسب الفرض).

وعليه حسب الخاصية العكسية لمستقيم المنتصفين $\mathcal{H}$ هي منتصف $[AB]$.

2. إثبات أنّ المثلثين OBC و ODA متقايسان : ↩ **(01,25 ن لكل طريقة صحيحة)**

⊡ **الطريقة الأولى :**

نرى مباشرة : $OA = OC$ (لأن : $\mathcal{O}$ منتصف القطعة $[AC]$) هذا من جهة أولى.

ومن جهة ثانية، لدينا : $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (التقابل بالرأس) و $\widehat{OAD} = \widehat{BCO}$ (التبادل الداخلي).

وأخيراً : المثلثان OBC و ODA متقايسان **(تقايس فيهما زاويتان وضلع محصور بينهما)**.

⊡ **الطريقة الثانية :**

لدينا : $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ (التقابل بالرأس) و بما أنّ $\mathcal{O}$ مركز متوازي أضلاع $ABCD$ ينتج لنا : $OB = OD$ و $OA = OC$.

إذن : المثلثان OBC و ODA متقايسان **(تقايس فيهما ضلعان و زاوية محصورة بينهما)**.

⊡ **الطريقة الثالثة :**

بما أنّ $\mathcal{O}$ مركز متوازي أضلاع $ABCD$ ينتج لنا : $OB = OD$ و $OA = OC$.

ولدينا أيضاً : $BC = AD$.

إذن : المثلثان OBC و ODA متقايسان **(يتقايس مثلثان إذا تقايست الأضلاع الثلاثة لأحدهما مع الأضلاع الثلاثة لآخر)**.

3. حساب الطول $\mathcal{OH}$: ↩ **(01,25 ن)**

ABD مثلث فيه $\mathcal{H} \in [AB]$ و $\mathcal{O} \in [BD]$.

وبما أنّ : $(\mathcal{HO})//(AD)$ (حسب الفرض).

حسب نظرية طالس ينتج لنا :

$$\frac{BH}{BA} = \frac{BO}{BD} = \frac{HO}{AD}$$

بعد التعويض المباشر نجد :

$$\frac{1}{2} = \frac{HO}{5}$$

من هذا الأخير نجد :

$$HO = \frac{5\times 1}{2} = 2,5cm$$

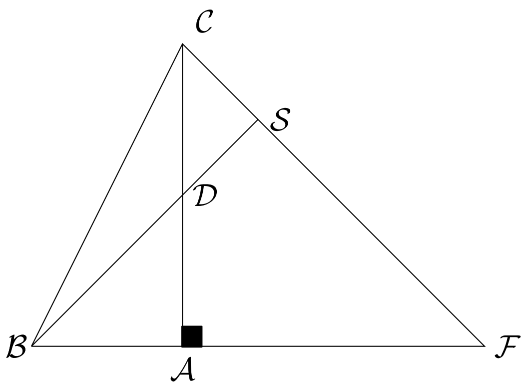
حل التمرين الرابع : (03 نقاط إضافية)

نذكّر التلميذ المتميز أنّه قبل أن نبدأ في حل هذه المشاكل، وجب علينا الرسم قصد سهولة التنبؤ بالحل.

◄ حل المشكل الأوّل :

⊡ قراءة نص المسألة :

↩ المعطيات الصريحة :



من خلال قراءة نص هذه المسألة يتضح أنّ الأمر يتعلق بالمعطيات التالية :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و $AB < AC$ و D نقطة من القطعة $[AC]$ و $AD = AB$ و F نقطة من نصف المستقيم $[BA)$ و $AF = AC$. ويمكن تلخيص هذه المعطيات في الشكل المجاور.

↩ المعطيات الضمنية :

باستعمال التعاريف أو الخاصيات، يمكن إجلاء معطيات أخرى، تكون ضمنية في نص المسألة.

من المُعطى ABC مثلث قائم الزاوية في A نستنتج أنّ :

1. (CA) ارتفاع للمثلث BFC. من المُعطى $AD = AB$ نستنتج أنّ : 2. $\widehat{ADB} = 45°$ من المُعطى $AF = AC$ نستنتج أيضا أنّ : $\widehat{ACF} = 45°$.

هناك معطيات ضمنية أخرى، لم يتم ذكرها لأنّ طريقة حل هذه المسألة المتّبعة ليست بحاجة إليها.

↩ ترجمة المطلوب :

المطلوب هو البرهان على أنّ المستقيمين (FD) و (BC) متعامدان وهذا يعني أنّ (FD) ارتفاعٌ للمثلث BCF.

حسب المُعطى الضمني الأوّل، يكفي أن نبيّن أنّ D هي مركز تعامد المثلث BCF.

لذا وجب أن نبرهن على أنّ المستقيم (BD) عمودي على المستقيم (FC).

↩ صياغة البرهان :

لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (FC).

لدينا : $\widehat{ACF} = 45°$ لأنّ المثلث ACF قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين ولدينا : $\widehat{CDS} = \widehat{ADB}$.

بما أنّ : $\widehat{ADB} = 45°$ لأنّ المثلث ABD قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين، فإنّ : $\widehat{CDS} = 45°$.

بما أنّ مجموع زوايا مثلث هو $180°$ فإنّ : $\widehat{DSC} = 90°$. إذن : (BS) عمودي على (FC).

بما أنّ : (AC) عمودي على (BF) و D هي تقاطع المستقيمين (BS) و (AC). و D هي مركز تعامد المثلث BCF.

ونعلم أنّ ارتفاعات مثلث تتلاقى في نقطة واحدة. إذن (FD) ارتفاع للمثلث BCF.

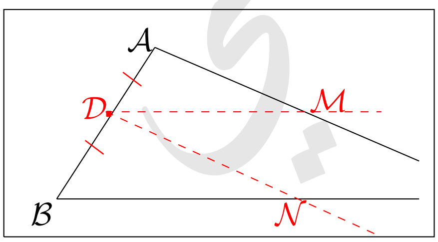
وهذا ما يوحي لنا أنّ : (FD) و (BC) متعامدان. **بذا يكتمل البرهان.**

◄ حل المشكل الثاني :

↩ نحدد أولاً النقطة D منتصف الضلع $[AB]$.

↩ نرسم من D مستقيماً يوازي $[BC]$ فيقطع $[AC]$ في منتصفه M.

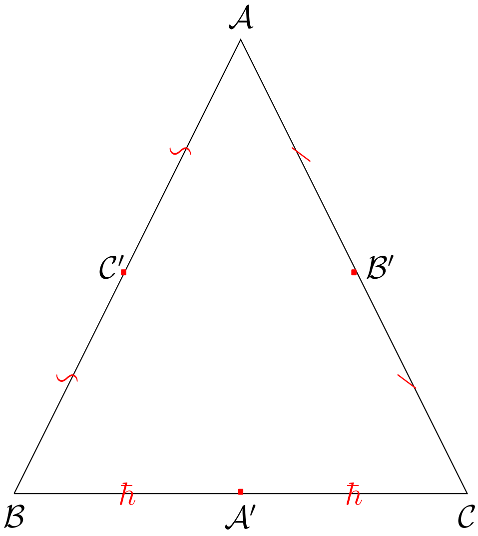
↩ نرسم من D مستقيماً يوازي $[AC]$ فيقطع $[BC]$ في منتصفه N.



◄ **حل المشكل الثالث :**

⊡ **قراءة نص المسألة :**

↩ **المعطيات الصريحة :**



عند قراءة نص هذه المسألة نلاحظ أنّ الأمر يتعلق بالمعطيات التالية :

- ABC مثلث.
- A' منتصف $[BC]$.
- B' منتصف $[AC]$.
- C' منتصف $[AB]$.

ويمكن تلخيص هذه المعطيات في الشكل جانبه :

↩ **المعطيات الضمنية :**

باستعمال خاصيات منتصفات أضلاع مثلث، يمكن إجلاء المعطيات التالية :

1. $(AC') = (AB)$.
2. $(A'B')$ يوازي (AB).
3. $(A'C')$ يوازي (AC).

وهناك معطيات ضمنية أخرى، لم يتم ذكرها، لأنّ طريقة البرهان المقترحة لا تحتاج إليها.

↩ **ترجمة المطلوب :**

المطلوب هو إثبات أنّ للقطعتين $[B'C']$ و $[AA']$ نفس المنتصف وحسب إحدى خاصيات متوازي الأضلاع، يكفي أن نبيّن أنّ الرباعي $AB'A'C'$ متوازي أضلاع.

↩ **صياغة البرهان :**

لدينا A' منتصف القطعة $[BC]$.

B' منتصف القطعة $[AC]$.

ومنه فإنّ $(A'B')$ يوازي (AB).

وبما أنّ $(AB) = (AC')$ (لأنّ C' نقطة من المستقيم (AB)) فإنّ :

$$(A'B')//(AC') \tag{3}$$

لدينا A' منتصف القطعة $[BC]$. C' منتصف القطعة $[AB]$.

ومنه فإنّ $(A'C')$ يوازي (AC).

وبما أنّ $(AC) = (AB')$ (لأنّ B' نقطة من المستقيم AC) فإنّ :

$$(A'C')//(AB') \tag{4}$$

وحسب النتيجتين (3) و (4) نستنتج أنّ الرباعي $AB'A'C'$ متوازي أضلاع.

إذن القطعتين $[B'C']$ و $[AA']$ لهما نفس المنتصف.

أستاذ المادة : جيوخ العربي.