تمارين للتحضير الجيّد للثّلاثي الثّاني.

أستاذ المادّة : جبوخ العربي.

كُن قويًا مهما كان داخلك متألم وحزين، فلن تكسب من الآخرين إلاّ الشفقة أو الشماتة!.

التّمرين الأوّل

ليكن العدد الحقيقي A، حَيْثُ : $A = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

1. أُكتب العدد A على الشّكل $a + b\sqrt{3}$، حَيْثُ : a وَ b عددان صحيحان نسْبيان.
2. أثبت أنَّ العدد B^{2024} عددٌ طبيعيٌّ، حَيْثُ : $B = \sqrt{7-4\sqrt{3}} \times \left(2+\sqrt{3}\right)$.
3. بَرْهن أنَّ : $\cos(45°)$ و $-\cos(45°)$ حَلَّيْن للمعادلة :

$$\frac{2x}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{x}.$$

مساعدة: لاحظ أنَّ : $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

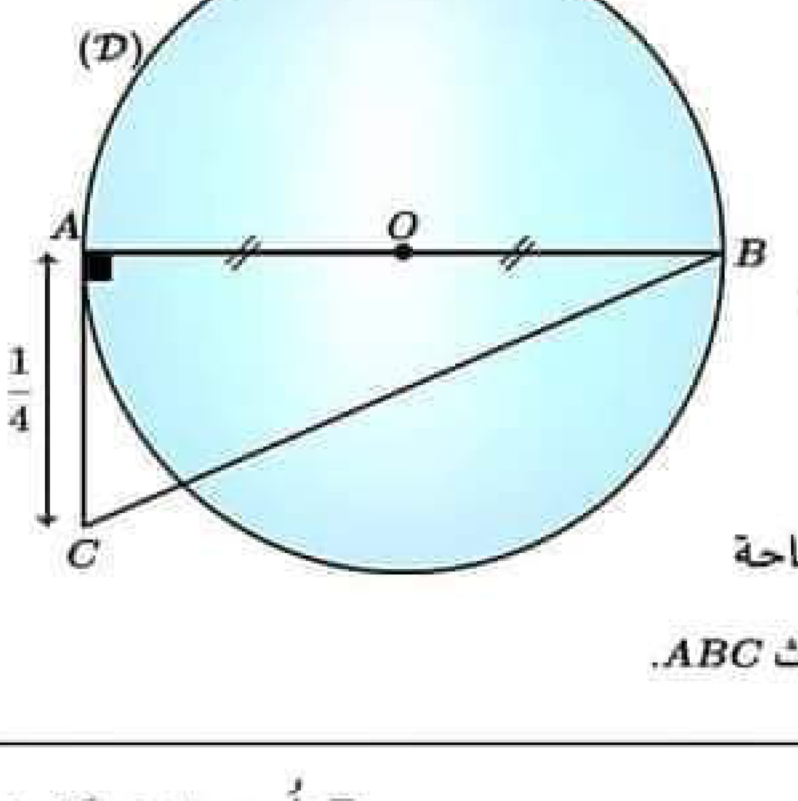
التّمرين الثّاني

x متغيّر حقيقي و E عبارة جبريّة، حَيْثُ :

$$E = 16 - (2-7x)^2 + 14x^2 - 12x.$$

1. أُنشر وبَسِّط العبارة E.
2. حلِّل العبارة $16 - (2-7x)^2$، ثُمَّ إستنتج تحليلاً للعبارة E.
3. حل المعادلة : $E = 0$.
4. أ. حل المتراجحة التّالية : $-35x^2 + 16x + 12 \geqslant -35x^2 + 14x$.
   ب. مثّل مجموعة حلول هذه المتراجحة بيانيًّا.

التّمرين الثّالث



ABC مثلّث قائم الزّاوية في A،

حَيْثُ : $AC = \frac{1}{4}$ ومساحة المثلّث ABC :

$S_{ABC} = \frac{8}{49}x^2$. ؛ $x > 0$

(D) قرص وطول نصف قطره OA ومركزه O.

1. بَيِّن أنَّ : $AB = \left(\frac{8}{7}x\right)^2$.
2. عَبِّر، عن الطّول BC بدلالة x.
3. أثبت أنّه إذا كان : $x = \frac{7}{16}\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)$ تكون مساحة القرص $S_{(D)}$ تُساوِي ثلاث أمْثال مساحة المثلّث ABC.

التَّمرين الرَّابع

نفرض في هذا التَّمرين أنَّ وحدة الطُّول هي : cm.

الشَّكل المرافق ليس مرسوم بالأطوال الحقيقيَة.

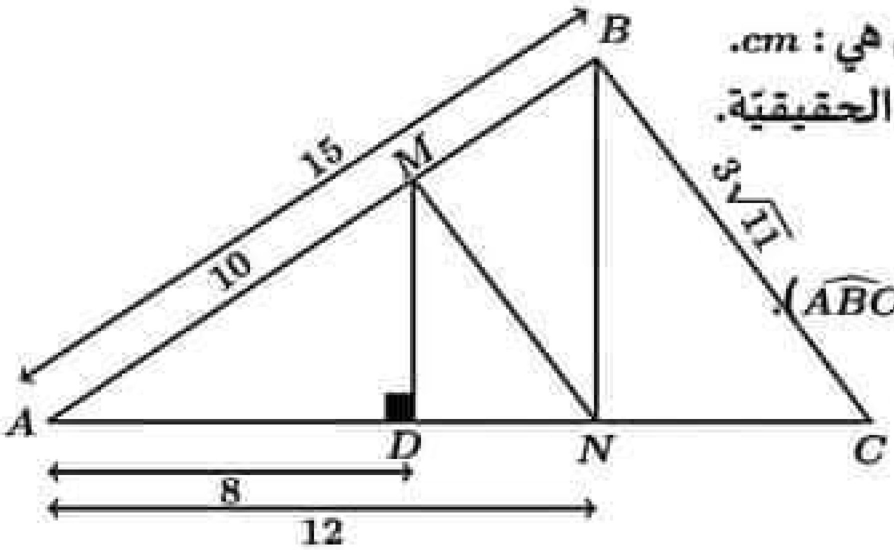
ABC مثلَث، حَيْثُ : $(MN) // (BC)$.

1. أحْسب الطولَيْن : AC وَ MD.

2. أثْبِت أنَّ : $(AB) \perp (BC)$ (أيْ : $\widehat{ABC} = 90°$).

3.أ. أحْسب وقارن النِّسْبتَيْن : $\frac{AD}{AN}$ وَ $\frac{AM}{AB}$.

ب. إسْتنتج أنَّ : $(MD) // (BN)$.



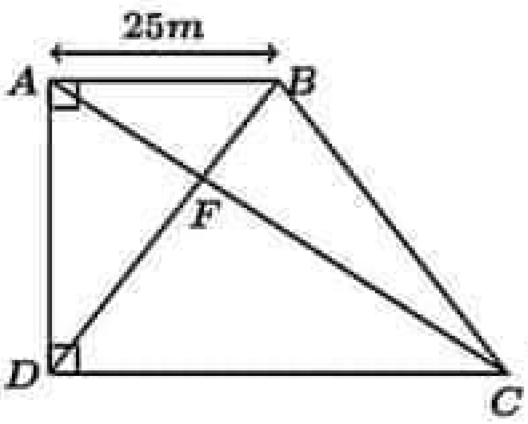
الوضعيَة الإدماجيَة

الجزء الأوَّل :

يملك عبد الرَّحمَان قطعة أرض على شكل شبه منحرف قائم قاعدتاه $[AB]$ وَ $[DC]$ "لاحظ الشَّكل المرافق". يُعطى : $AB = 25m$ وَ $\widehat{ADB} = 38°$.

1. أُحْسب الطُّول DC، علما أنَّ : $\frac{FA}{FC} = \frac{1}{2}$.

2. أُحْسب الطُّول AD بالتَّدوير إلى الوحدة.



الجزء الثَّاني :

تنازل عبد الرَّحمان إلى زكرياء عن القطعة مثلَثة الشَّكل MBC.

ويُعطى : $AB = 25m$; $AD = 32m$; $DC = 50m$.

نضع : $MB = 2x + 1$ مع : $x > -\frac{1}{2}$.

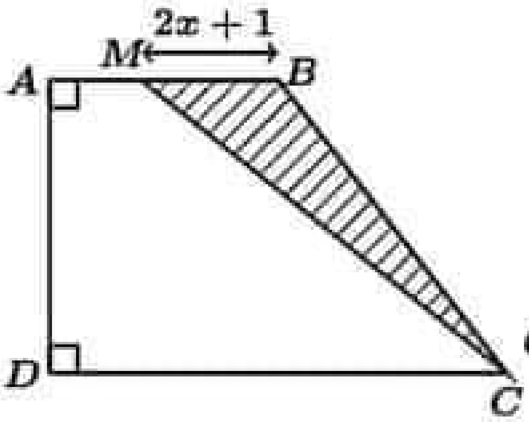
S_0 : مساحة المثلَث MBC.

S_1 : مساحة شبه المنحرف $AMCD$.

1.أ. جِد حصرًا لِ : x.

ب. مَثِّل قيم x بيانيًّا.

2. عَيِّن قيم x حتى تكون مساحة القطعة التِّي يملكها عبد الرَّحمان تُساوي على الأقل أربع مرات مساحة القطعة التِّي يملكها زكرياء.



"الإنجاز يعيد لك بهجة الحياة، ويشعرك بقيمة وجودك، وبقدرتك على الفعل، ويملأ الفراغ -الذي هو سبب كل مشاكل البشر تقريبًا-، ويخفف من المبالغة في انشغال الإنسان بنفسه، فلتتوجه طاقتك للفعل الخارجي، بدلًا من الاسترخاء في خيمة الكسل، والاستسلام للخواطر الرديئة."

أستاذ مادة الرياضيات

جيوخ العربي

□ حل التّمرين الأوّل :

1. كتابة العدد A على الشّكل $a+b\sqrt{3}$:

تذكير مهم : a وَ b عددان حقيقيان، لدينا :

$\boxed{(a-b)^2 = (a)^2 - 2(a)(b) + (b)^2}$.

$$
\begin{aligned}
A &= \left(2-\sqrt{3}\right)^2 \\
&= (2)^2 - 2(2)\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&= 4 - 4\sqrt{3} + 3 \\
&= 4 + 3 - 4\sqrt{3} \\
&= 7 - 4\sqrt{3} \\
&= 7 + (-4)\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

حَيْثُ : $a = 7$ وَ $b = -4$.

2. إثبات أنَّ العدد B^{2024} عددٌ طبيعي :

نُبسِط عبارة العدد B. حسب السؤال الأوّل، لدينا : $\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 7-4\sqrt{3}$. إذن :

$$
\begin{aligned}
B &= \sqrt{7-4\sqrt{3}} \times \left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} \times \left(2+\sqrt{3}\right) \\
&= \left(2-\sqrt{3}\right) \times \left(2+\sqrt{3}\right); \quad 2-\sqrt{3} > 0 \\
&= (2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&= 4 - 3 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

لدينا : $B = 1$ أيْ : $(B)^{2024} = (1)^{2024}$

إذن : $\boxed{(B)^{2024} = 1}$.

3.

$$
\begin{aligned}
&\frac{2x}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{x} \\
&(2x) \times (x) = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) \\
&2x^2 = (2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&2x^2 = 4 - 3 \\
&2x^2 = 1 \\
&x^2 = \frac{1}{2} \\
&x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\
&x = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\
&x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&x = \pm\frac{(1)\times\left(\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{2}\right)} \\
&x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

بما أنَّ : $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وَ $-\cos(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن، المعادلة $\frac{2x}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{x}$ تقبل حلان هما : $\cos(45°)$ و $-\cos(45°)$.

□ حل التّمرين الثّاني :

1. النشر والتّبسيط العبارة E :

$$
\begin{aligned}
E &= 16 - (2-7x)^2 + 14x^2 - 12x \\
&= 16 - \left[(2)^2 - 2(2)(7x) + (7x)^2\right] + 14x^2 - 12x \\
&= 16 - \left[4 - 28x + (7)^2(x)^2\right] + 14x^2 - 12x \\
&= 16 - 4 + 28x - 49x^2 + 14x^2 - 12x \\
&= (-49+14)x^2 + (+28-12)x + (+16-4) \\
&= -35x^2 + 16x + 12
\end{aligned}
$$

2. تحليل العبارة $16-(2-7x)^2$:

$$
\begin{aligned}
16 - (2-7x)^2 &= (4)^2 - (2-7x)^2 \\
&= [(4) + (2-7x)]\,[(4) - (2-7x)] \\
&= [4 + 2 - 7x]\,[4 - 2 + 7x] \\
&= (6-7x)(2+7x)
\end{aligned}
$$

إستنتاج تحليلا للعبارة E :

في هاته الحالة، نُعوِّض تحليل العبارة $16-(2-7x)^2$ في العبارة المُسماة E، ثمّ نحلّل العبارة $14x^2-12x$ وذلك باستخراج $-2x$ كعامل مُشترك منها.

توضيح : $14x^2 - 12x = -2x(-7x+6)$. فنجد :

$$
\begin{aligned}
E &= 16 - (2-7x)^2 + 14x^2 - 12x \\
&= (6-7x)(2+7x) - 2x(-7x+6) \\
&= (6-7x)(2+7x) - 2x(6-7x) \\
&= (6-7x)\left[(2+7x) - 2x\right] \\
&= (6-7x)(2+7x-2x) \\
&= (6-7x)(2+5x)
\end{aligned}
$$

3. حل المعادلة $E = 0$:

لدينا : $E = (6-7x)(2+5x)$

أيْ : $(6-7x)(2+5x) = 0$

تُكافِئ : $(6-7x) = 0$ أوْ $(2+5x) = 0$.

حل المعادلة :	حل المعادلة :
$(2+5x)=0$	$(6-7x)=0$
$5x=-2$	$-7x=-6$
$x=\frac{-2}{5}$	$x=\frac{-6}{-7}=\frac{6}{7}$

إذن، المعادلة $E=0$ تقبل حلان متمايزان هما : $\frac{6}{7}$ و $-\frac{2}{5}$.

4.أ. حل : $-35x^2+16x+12 \geqslant -35x^2+14x$:
نضع :

$$-35x^2+16x+12 \geqslant -35x^2+14x \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
&-35x^2+16x+12 \geqslant -35x^2+14x\\
&-35x^2+16x+35x^2-14x \geqslant -12\\
&\underbrace{-35x^2+35x^2}_{=0}+16x-14x \geqslant -12\\
&(+16-14)\,x \geqslant -12\\
&2x \geqslant -12\\
&x \geqslant -\frac{12}{2}\\
&x \geqslant -6
\end{aligned}$$

كل قيم x الأكبر أو تُساوي 6- هي حلول للمتراجحة المُسماة بِ (1).

ب. تمثيل مجموعة حلول المتراجحة (1) :

□ حل التّمرين الثّالث :

1. تَبيّن أنّ : $AB = \left(\frac{8}{7}x\right)^2$:

تذكير جميل : نعلم أنّ :

$$\text{مساحة المثلّث} = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$$

لدينا : $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

ولمّا كانت :

$$S_{ABC} = \frac{8}{49}x^2$$

نجد :

$$\frac{8}{49}x^2 = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8}{49}x^2 &= \frac{AB \times AC}{2}\\
\frac{8}{49}x^2 &= \frac{AB \times \frac{1}{4}}{2}\\
\frac{8}{49}x^2 &= \frac{\frac{AB}{4}}{\frac{2}{1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{8}{49}x^2 &= \frac{AB \times 1}{4 \times 2}\\
\frac{8}{49}x^2 &= \frac{AB}{8}\\
8 \times \frac{8}{49}x^2 &= 8 \times \frac{AB}{8}\\
AB &= \frac{8^2}{7^2}x^2\\
AB &= \left(\frac{8}{7}x\right)^2
\end{aligned}$$

2. التّعبير، عن الطُّول BC بدلالة x :

ABC حسب نظرية فيتاغورس المباشرة، فإنّ :

$$\begin{aligned}
(BC)^2 &= (AB)^2 + (AC)^2\\
&= \left[\left(\frac{8}{7}x\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\\
&= \left(\frac{8}{7}x\right)^4 + \frac{(1)^2}{(4)^2}\\
&= \left(\frac{8}{7}x\right)^4 + \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

إذن : $BC = \sqrt{\left(\frac{8}{7}x\right)^4 + \frac{1}{16}}$.

3. تذكير آخر : نعلم أنّ :

$$\text{مساحة القرص} = \pi\,(\text{نصف القطر})^2$$

$$\begin{aligned}
&S_{(\mathcal{D})} = 3S_{ABC}\\
&\pi\left(\frac{32}{49}x^2\right)^2 = 3\,\frac{8}{49}x^2\\
&\pi\left(\frac{32}{49}\right)^2 (x^2)^2 = \frac{24}{49}x^2\\
&\frac{(32)^2\pi}{(49)^2}x^4 - \frac{24}{49}x^2 = 0\\
&\frac{x^2}{49}\left[\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24\right] = 0
\end{aligned}$$

معناه : $\frac{x^2}{49} = 0$ أوْ : $\left[\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24\right] = 0$

◄ حل المعادلة : $\frac{x^2}{49} = 0$:

لدينا : $\frac{x^2}{49} = 0$ معناه : $x^2 = 0$ إذن $x = 0$ (مرفوض بسبب أنّ $x > 0$).

◄ حل المعادلة : $\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24 = 0$:

لدينا : $\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24 = 0$ معناه :

$$\begin{aligned}
\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24 &= 0\\
\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 &= 24\\
x^2 &= \frac{24}{\frac{(32)^2\pi}{49}}\\
x^2 &= \frac{24 \times 49}{(32)^2\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \pm\sqrt{\frac{24 \times 49}{(32)^2\pi}}\\
x &= \pm\frac{\sqrt{24} \times \sqrt{49}}{\sqrt{(32)^2} \times \sqrt{\pi}}\\
x &= \pm\frac{14\sqrt{6}}{32\sqrt{\pi}}\\
x &= \pm\frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}
\end{aligned}$$

إذن، المعادلة $\frac{(32)^2\pi}{49}x^2 - 24 = 0$ تقبل حلان مُتمايزان، هما : $\frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ وَ $-\frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$

وبما أنَّ : $x > 0$، فإنَّ الحل الأوّل $\frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ (مقبول) والحل الثّاني $-\frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ (مرفوض).

إذن : $x = \frac{7}{16}\sqrt{\frac{6}{\pi}}$.

□ حل التّمرين الرّابع :

حساب الطول AC

(AB) و (AC) مستقيمان متقاطعان في A. (من الشكل) ولدينا أيضًا : $(MN) // (BC)$ (من المعطيات).

حسب نظرية طالس المباشرة، فإنَّ :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

تطبيق عددي :

$$\frac{10}{15} = \frac{12}{AC} = \frac{MN}{3\sqrt{11}}$$

من المساواة :

$$\frac{10}{15} = \frac{12}{AC}$$

نجد أنَّ :

$$AC = \frac{12 \times 15}{10}$$

وعليه :

$$AC = \frac{180}{10}$$

إذن :

$$AC = 18cm$$

حساب MD:

AMD مثلث قائم في D، حسب نظرية فيتاغورس المباشرة، لدينا : $(AM)^2 = (AD)^2 + (MD)^2$

تطبيق عددي :

$$(10)^2 = (8)^2 + (MD)^2$$

وبالتالي :

$$100 = 64 + (MD)^2$$

وعليه :

$$(MD)^2 = 100 - 64$$

أي :

$$(MD)^2 = 36$$

إذن : $MD = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

بما أنَّ الطول عددٌ موجبٌ، فإنَّ : $MD = 6cm$.

2. إثبات أنَّ : $(AB) \perp (BC)$

لأثبات أنَّ $(AB) \perp (BC)$، يكفي أن نُثبت أنَّ المثلّث ABC قائم الزّاوية في النُّقطة B.

لنحسب $(AC)^2$ و $(AB)^2 + (BC)^2$:

(1) $$(AC)^2 = (18)^2 = 324$$

ولدينا أيضاً :

(2)
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (15)^2 + \left(3\sqrt{11}\right)^2 = (15)^2 + 3^2 \times \sqrt{11}^2 = 225 + 99 = 324$$

من (1) و (2) نستنتج أنَّ

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

إذن، المثلّث ABC قائم الزّاوية في B.
(حسب النظرية العكسية لنظرية فيتاغورس).

إذن : $(AB) \perp (BC)$.

3. حساب ومقارنة $\frac{AD}{AN}$ وَ $\frac{AM}{AB}$:

$$\frac{AD}{AN} = \frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{AM}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{10 \div 5}{15 \div 5} = \frac{2}{3}$$

إذن : $\frac{AD}{AN} = \frac{AM}{AB}$.

ب. إستنتاج أنَّ : $(MD) // (BN)$:

بما أنَّ النقط $A; M; B$ والنقط $A; D; N$ في استقامية و بنفس الترتيب. (3)

لدينا :

(4) $$\frac{AD}{AN} = \frac{AM}{AB}$$

من (3) و (4) نستنتج أنَّ المستقيمَين (MD) وَ (BN) متوازيان.
(حسب النظرية العكسية لنظرية طالس).

□ **حل الوضعيّة الإدماجيّة :**

1. حساب الطّول DC، علما أنَّ : $\frac{FA}{FC} = \frac{1}{2}$:

(AC) و (BD) مستقيمان متقاطعان في F.

(من الشكل) ولدينا أيضًا : $(DC) // (AB)$ (لأنّهما عموديان على نفس المستقيم (AD)).

حسب نظرية طالس المباشرة، فإنَّ :

$$\frac{FA}{FC} = \frac{FB}{FD} = \frac{AB}{DC}$$

تطبيق عددي :

$$\frac{1}{2} = \frac{FB}{FD} = \frac{25}{DC}$$

من المساواة:

$$\frac{1}{2} = \frac{25}{DC}$$

أيْ : $DC = \frac{25 \times 2}{1}$ إذن : $DC = 50m$.

2. حساب الطُّول MD بالتَّدوير إلى الوحدة :

ABD مثلّث قائم الزّاوية في A، فإنَّ :

$$\begin{aligned} &\tan\left(\widehat{ADB}\right) = \frac{AB}{AD} \\ &\tan(38°) = \frac{25}{AD} \\ &AD = \frac{25 \times 1}{\tan(38°)} \\ &AD \approx 32 \end{aligned}$$

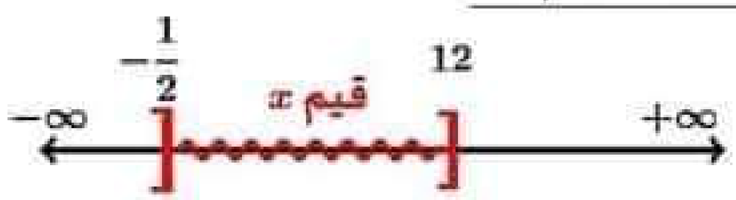
إذن : $AD \approx 32m$.

1.أ. إيجاد حصْرًا للعدد x :

لدينا وُضُوحًا :

$$\begin{aligned} &0 < MB \leqslant AB \\ &0 < 2x + 1 \leq 25 \\ &0 - 1 < 2x \underbrace{+1-1}_{=0} \leqslant 25 - 1 \\ &-1 < 2x \leq 24 \\ &\frac{-1}{2} < \frac{2x}{2} \leqslant \frac{24}{2} \\ &-\frac{1}{2} < x \leqslant 12 \end{aligned}$$

ب. تمثيل قيم x :



2. تعيّن قيم x :

تذكير مهم : a وَ b عددان حقيقيان، لديْنا :

$$\text{مساحة المثلّث} = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$$

$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{\text{ار} \times (\text{ق ك} + \text{ق ص})}{2}$$

- ق ص : القاعدة الصغرى.
- ق ك : القاعدة الكبرى.
- ار: الارتفاع.

حتى تكون مساحة القطعة التِّي يملكها عبد الرَّحمان تُساوي على الأقل أربع مرات مساحة القطعة التِّي يملكها زكرياء. معناه : $S_1 \geqslant 4S_0$

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{MB \times AD}{2} \\ &= \frac{32(2x+1)}{2} \\ &= \frac{32 \times 2x + 32 \times 1}{2} \\ &= \frac{64x}{2} + \frac{32}{2} \\ &= 32x + 16 \end{aligned}$$

هذا من جهة، ومن جهة ثانية، لدينا :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{(AM + DC) \times AD}{2} \\ &= \frac{32[25 - (2x+1) + 50]}{2} \\ &= \frac{32(74 - 2x)}{2} \\ &= \frac{32 \times 74}{2} - \frac{32 \times 2x}{2} \\ &= 1184 - 32x \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} &S_1 \geqslant 4S_0 \\ &1184 - 32x \geqslant 4(32x + 16) \\ &1181 - 32x \geqslant 4 \times 32x + 4 \times 16 \\ &1181 - 32x \geqslant 128x + 64 \\ &-32x - 128 \geqslant 64 - 1181 \\ &(-32 - 128)x \geqslant -1120 \\ &-160x \geqslant -1120 \\ &x \leqslant \frac{-1120}{-160} \\ &x \leqslant 7 \end{aligned}$$

ومنه، مَجْموعة حلول المتراجحة : كل قيم x الأصْغر من أوْ تُساوي 7. إذن، القيم المطلوبة للعدد x، هي :

$$-\frac{1}{2} < x \leqslant 7$$

تمارين للتحضير الجيد للثلاثي الثاني. أستاذ المادة : جبوخ العربي.

"لا تذكر النعم أمام كل أحد، فليس كل مستمع لك محب. ولا تكن كتاباً مفتوحاً متاحاً لمن حولك، وإن كانوا أقرب الناس إليك. واخف بعض أسرارك، فربما لن يملك أحد قميص يوسف، ولن تملك أنت صبر وإيمان يعقوب".

التمرين الأوّل

1. أُكتب الكسر $\frac{8}{4\sqrt{2}}$ على شكل كسر مقامه عددٌ ناطقٌ.
2. ليكن العددان الحقيقيان $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{Z}$، حَيْثُ :

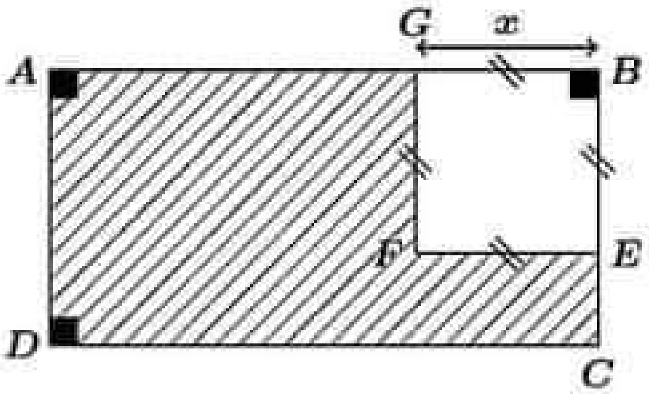
$$\mathcal{Z} = (-2) \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{32} \quad ; \quad \mathcal{H} = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{36}.$$

أثبت أنَّ: $\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{H}} = \sqrt{2}$.

التمرين الثّاني

أُنشر، وَبَسِّط العبارة : $S = (t+8)(t+4)$.

تأمل جيِّدًا في الشّكل المقابل (الرسم غير مرسوم بأطواله الحقيقيّة).



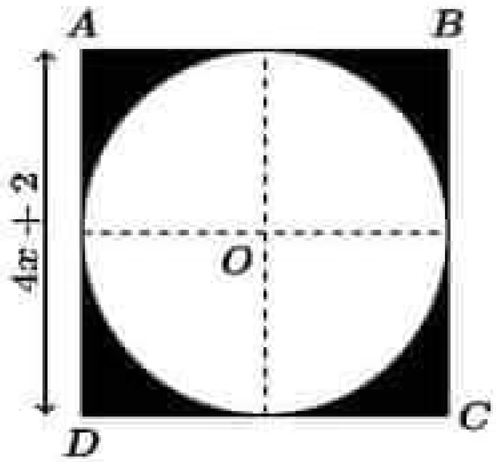
$ABCD$ مستطيل، حَيْثُ :

- $GBEF$ مربّع.
- $CE = 4\,\text{cm}$ وَ $AG = 8\,\text{cm}$.
- مساحة الجزء الملوّن تُساوي $92\,\text{cm}^2$.

1. جِد قيمة العدد x.
2. أحسب القيمة العددية لمساحة المربّع : $GBEF$.
3. إستنتج القيمة العددية لمساحة المستطيل : $ABCD$.

التمرين الثّالث

$ABCD$ مربّع طول ضلعه $4x + 2$، حَيْثُ : $x > -\frac{1}{2}$. $(\mathcal{D})$ قرص طول قطره AB.



1. أ. أعْطِ حَصْرًا للعدد x، حتى يكون محيط المربّع $ABCD$ يُساوي على الأكثر $48\,cm$.
ب. مثِّل قيم x على مستقيم مدرّج.
2. نرمز بالرمز S لمساحة الجزء الملوّن باللّون الأسْود.
   - برهن أنَّ: $S = (4-\pi)(2x+1)^2$.
   - أُنشر، ثُمَّ بَسِّط العبارة S.
   - هَل تُوجد قيمة للعدد x حتى تكون مساحة القرص $(\mathcal{D})$ تُساوي نصف مساحة المربّع $ABCD$ ؟

التَّمرين الرَّابع

- نأخذ في هذا التَّمرين وحدة قيس الطُّول هي السنتمتر " cm ".
- ليكن ABC مثلثاً متساوي السَّاقَيْن في A. الارتفاع المار من A يقطع القطعة $[BC]$ في H، بِحَيْث : $AH = 4$ و $BC = 6$.
- لتكن M نقطة من القطعة $[BH]$. المستقيم المار من M والموازي للمستقيم (AH) يقطع المستقيم (AB) في P.
- نضع : $BM = x$.

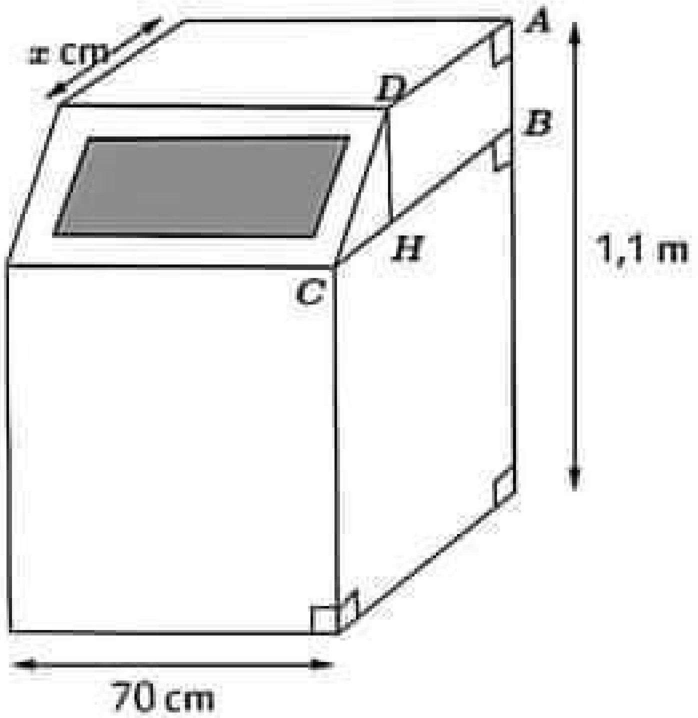
أ. بِطَرِيقَتَيْن مختَلِفَتَيْن، بَيِّن صحة المساواة التَّالِيَة : $\frac{PM}{x} = \frac{4}{3}$.

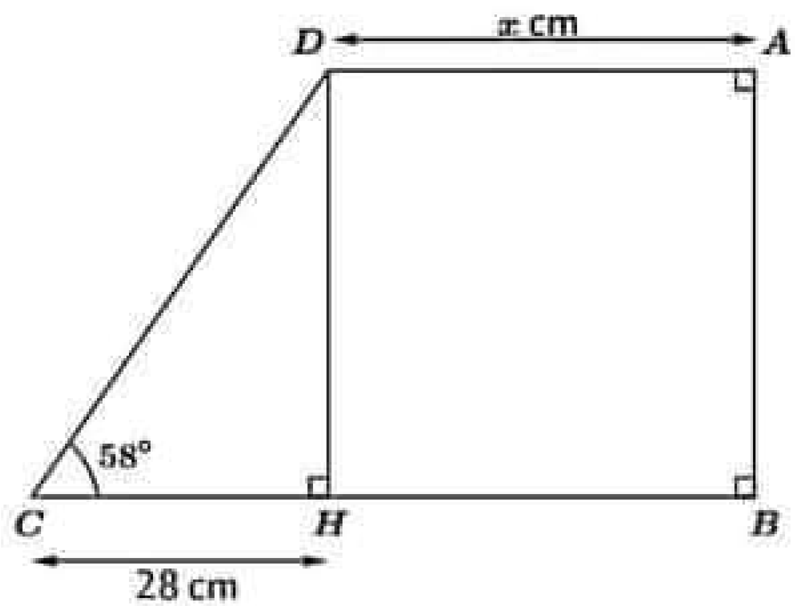
ب. في هذا السؤال. نفترض أنّ P منتصف القطعة $[AB]$.

- أوْجد كلاًّ من BM وَ PM.

الوضعيَة الإدماجيَة (مركّبة) :

- وحدة الطول هي السنتيمتر (cm)
- تحت شعار «معا من أجل مدينة نظيفة» ، قرّرت دائرة "دار الشيوخ" توفير حاويات قمامة حسب الشكل الممثل أدناه، حَيْثُ : تريد أن لا يقل حجمها عن $0,5\ m^3$.





- عَيِّن أدنى قيمة للعدد x الذي يُحَقِّق هذا الشرط.

تذكير ببعض القوانين :
① مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{الارتفاع} \times (\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى})}{2}$
② حجم الموشور القائم = الارتفاع × مساحة القاعدة

حل التّمرين الأوّل

1. كتابة $\frac{8}{4\sqrt{2}}$ على شكل كسر مقامه عدد ناطق :

$$\begin{aligned}\frac{8}{4\sqrt{2}} &= \frac{(8)\times\left(\sqrt{2}\right)}{\left(4\sqrt{2}\right)\times\left(\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{8\sqrt{2}}{4\times\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{4\times 2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{1}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

2. إثبات أنّ : $\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{H}} = \sqrt{2}$:

نرى مباشرة :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left(2+\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{36}\\ &= (2)^2 + 2(2)\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{36}\\ &= 4 + 4\sqrt{2} + 2 - 6\\ &= \underbrace{6-6}_{=0} + 4\sqrt{2}\\ &= 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= (-2)\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{32}\\ &= \underbrace{(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)}_{=1}\times\sqrt{2}\times\sqrt{32}\\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{32}\\ &= \sqrt{2\times 32}\\ &= \sqrt{64}\\ &= 8\end{aligned}$$

الآن، بامكاننا تعويض قيمي كلاًّ من $\mathcal{H}$ وَ $\mathcal{Z}$ في $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{Z}}$، فنجد أنَّ :

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{Z}} = \frac{8}{4\sqrt{2}}$$

وحسب السؤال الأوّل، فنجد أنَّ :

$$\frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

إذن :

$$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{Z}} = \sqrt{2}$$

حل التّمرين الثّاني

النشر والتّبسيط :

$$\begin{aligned}S &= (t+8)(t+4)\\ &= t(t+4) + 8(t+4)\\ &= t\times t + t\times 4 + 8\times t + 8\times 4\\ &= t^2 + 4t + 8t + 32\\ &= t^2 + (4+8)t + 32\\ &= t^2 + 12t + 32\end{aligned}$$

1. إيجاد قيمة العدد x :

- نرمز بالرمز $\mathcal{S}$ لمساحة المستطيل $ABCD$.
- نرمز بالرمز $\mathcal{S}_0$ لمساحة المربّع $GBEF$.
- نرمز بالرمز $\mathcal{S}_1$ لمساحة الشكل $AGFECD$.

فيكون، لدينا وُضوحًا : $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1$.

ولمّا كان :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= GB\times BE\\ &= (x)\times(x)\\ &= x^2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathcal{S} &= AB\times BC\\ &= (x+8)(x+4)\\ &= x^2 + 12x + 32\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}& x^2 + 12x + 32 = x^2 + 92\\ & \underbrace{x^2 - x^2}_{=0} + 12x = \underbrace{92 - 32}_{=60}\\ & 12x = 60\\ & x = \frac{60}{12}\\ & x = 5\end{aligned}$$

إذن، القيمة المطلوبة للعدد x هي : 5 cm.

2. حساب $\mathcal{S}_0$: لدينا :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 &= GB\times BE\\ \mathcal{S}_0 &= (x)\times(x)\\ &= (x)^2\\ &= (5)^2\\ &= 25\end{aligned}$$

إذن : $\mathcal{S}_0 = 25\ \text{cm}^2$.

3. استنتاج $\mathcal{S}_1$: لدينا :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1\\ &= 25 + 92\\ &= 117\end{aligned}$$

إذن : $\mathcal{S} = 117\ \text{cm}^2$.

حل التّمرين الثّالث

1.أ. إعطاء حصرًا للعدد x :

نرمز بالرمز $\mathcal{P}$ لمحيط المربّع $ABCD$.

فيكون، لدينا : $\mathcal{P} = 4\times AB$

ولمّا كان : $AB = 4x+2$،

فيكون، لدينا : $\mathcal{P} = 4\times(4x+2)$

أيْ : $\mathcal{P} = 4\times 4x + 4\times 2$ أيْ : $\mathcal{P} = 16x + 8$.

حتى يكون محيط المربّع $ABCD$ يساوي على الأكثر $48cm$ يلزم ويكفي أنْ يكون : $\mathcal{P} \leqslant 48$.

إذن :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P} \leqslant 48\\
&16x + 8 \leqslant 48\\
&16x \leqslant 48 - 8\\
&16x \leqslant 40\\
&x \leqslant \frac{40}{16}\\
&x \leqslant \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

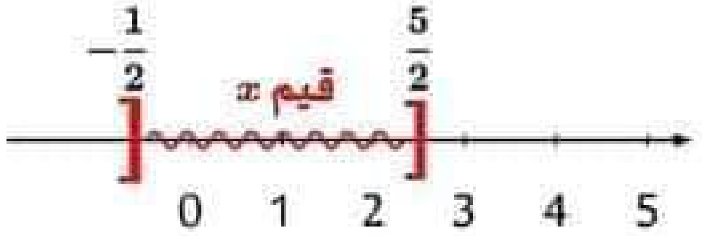
هذا من جهة، ومن جهة ثانيّة، لدينا : $x > -\frac{1}{2}$

إذن، الحصر المطلوب للعدد x هو : $-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{2}$.

ب. تمثيل قيم x على مستقيم مدرّج :

حسب السؤال 1.أ.، لدينا :

$-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{2}$.



2. برهان أنَّ : $\mathcal{S} = (4-\pi)(2x+1)^2$:

-عزيزي المجتهد- نعلم أنَّ: مساحة القرص تُساوي : ^{2}(نصف قطر القرص) π.

نرمز بالرمز $\mathcal{S}'$ لمساحة المربّع $ABCD$ و نرمز بالرمز $\mathcal{S}''$ لمساحة القرص $(\mathcal{D})$.

لدينا :

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S} + \mathcal{S}''$$

إذن :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \mathcal{S}' - \mathcal{S}''\\
&= (4x+2)^2 - \pi(2x+1)^2\\
&= (4x+2)^2 - \left(\sqrt{\pi}\right)^2(2x+1)^2\\
&= (4x+2)^2 - \left[\sqrt{\pi}\,(2x+1)\right]\\
&= \left[(4x+2) + \left(\sqrt{\pi}\,(2x+1)\right)\right]\left[(4x+2) - \left(\sqrt{\pi}\,(2x+1)\right)\right]\\
&= \left(4x+2+2\sqrt{\pi}x+\sqrt{\pi}\right)\left(4x+2-2\sqrt{\pi}x-\sqrt{\pi}\right)\\
&= \left[(2x)\left(2+\sqrt{\pi}\right)+2+\sqrt{\pi}\right]\left[(2x)\left(2-\sqrt{\pi}\right)+2-\sqrt{\pi}\right]\\
&= \left[\left(2+\sqrt{\pi}\right)(2x+1)\right]\left[\left(2-\sqrt{\pi}\right)(2x-1)\right]\\
&= \left(2+\sqrt{\pi}\right)\left(2-\sqrt{\pi}\right)(2x+1)(2x+1)\\
&= \left[(2)^2 - \left(\sqrt{\pi}\right)^2\right](2x+1)^2\\
&= (4-\pi)(2x+1)^2
\end{aligned}$$

النشر والتّبسيط :

حسب السؤال السّابق، لدينا :

$\mathcal{S} = (4-\pi)(2x+1)^2$.

قبل أن نبدأ في حل هذا السؤال السهل،يَلْزَم عَلَيَّ بتذكير بالمتطابقة الشّهيرة الأولى :

$$(a+b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= (4-\pi)(2x+1)^2\\
&= (4-\pi)\left[(2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2\right]\\
&= (4-\pi)\left[(2)^2(x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2\right]\\
&= (4-\pi)\left[4x^2+4x+1\right]\\
&= 4(4-\pi)x^2 + 4(4-\pi)x + (4-\pi)
\end{aligned}$$

هل تُوجد قيمة للعدد x :

نفرض أنّها توجد قيمة للعدد x تُحقّق :

$\mathcal{S}'' = \frac{1}{2}\mathcal{S}'$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}'' = \frac{1}{2}\mathcal{S}'\\
&\pi(2x+1)^2 = \frac{1}{2}(4x+2)^2\\
&2\pi(2x+1)^2 = (4x+2)^2\\
&2\pi(2x+1)^2 = \left[(2)(2x+1)\right]^2\\
&2\pi(2x+1)^2 = (2)^2(2x+1)^2\\
&2\pi(2x+1)^2 = 4(2x+1)^2\\
&2\pi(2x+1)^2 - 4(2x+1)^2 = 0\\
&(2x+1)^2(2\pi-4) = 0
\end{aligned}$$

يستلزم أنَّ : $(2x+1)^2 = 0$ لأنَّ : $(2\pi-4) \neq 0$.

إذن : $x = -\frac{1}{2}$.

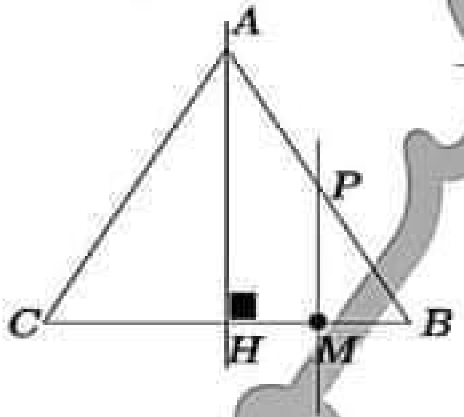
للأسف الشديد!!!، لا تُوجد قيمة للعدد x تُحقِق العلاقة : $\mathcal{S}'' = \frac{1}{2}\mathcal{S}'$، لأنَّ : $x > -\frac{1}{2}$.

حل التَّمرين الرَّابع

1. تبيّن صحة المساواة $\frac{PM}{x}=\frac{4}{3}$:

قبْل أنْ نبدأ بحل هذا السؤال، ينبغي رسم شكلاً يُترجم لنا مضمون معطيات نص هذا التمرين.

• الرسم :



◄ طريقة أولى :

في المثلث HAB. لدينا $M \in (HB)$ و $P \in (AB)$

وفضلاً عن ذلك، لدينا : $(AH)//(PM)$.

حسب نظرية طالس المباشرة، لدينا :

$$\frac{BM}{BH}=\frac{BP}{BA}=\frac{MP}{HA}$$

بالتعويض المباشر، نجد :

$$\frac{x}{3}=\frac{MP}{4}=\frac{BP}{BA} \qquad (1)$$

ومنه :

$$\frac{MP}{x}=\frac{4}{3}$$

◄ طريقة ثانية :

MBP مثلث قائم في M. فنجد أنّ :

$$\tan(\widehat{B})=\frac{MP}{MB}=\frac{MP}{x} \qquad (2)$$

هذا من ناحية أولى، ومن ناحية ثانية، لدينا HBA مثلث قائم في H :

$$\tan(\widehat{B})=\frac{HA}{MB}=\frac{4}{3} \qquad (3)$$

من العلاقتين السابقتين (2) و (3) نستنتج أنّ :

$$\frac{MP}{x}=\frac{4}{3}$$

2. إيجاد كل من BM و PM :

بما أنّ P منتصف القطعة $[AB]$ فإنّ : $\frac{BP}{BA}=\frac{1}{2}$

ومن العلاقة (1) نجد : $\frac{x}{3}=\frac{MP}{4}=\frac{1}{2}$.

إذن :

$$BM=\frac{3}{2}cm$$

$$PM=\frac{4}{2}=2cm$$

حل الوضعيّة الإدماجيّة

1. حساب الطُّول DH :

في المثلّث CDH القائم الزّاوية في H، لدينا :

$$\tan\left(\widehat{DCH}\right)=\frac{DH}{CH}$$

$$\tan(58°)=\frac{DH}{28}$$

$$DH=28\times\tan(58°)\approx 45$$

القيمة التّقريبيّة للطُّول DH (التّدوير إلى الوحدة): $DH\approx 45cm$.

2. حساب مساحة شبه المنحرف $ABCD$:

نعلم أنّ: م ش م = $\frac{\text{ا} \times (\text{ق ك}+\text{ق ص})}{2}$ إذن :

$$S_1=\frac{AB\,(CH+DA)}{2}$$

$$\approx\frac{45\,(x+28+x)}{2}$$

$$\approx\frac{45\,(2x+28)}{2}$$

$$\approx\frac{90x+1260}{2}$$

$$\approx 45x+630$$

أي: $S_1\approx 45x+630$.

3. حجم الجزء العلوي من الحاوية :

$$\mathcal{V}_1=\mathcal{S}_1\times h\approx 70\,(45x+630)$$

$$\approx 3150x+44100$$

4. حجم الجزء السفلي من الحاوية :

$$\mathcal{V}_2=\mathcal{S}_2\times h_2$$

$$\approx(110-45)\times(x+28)\times 70$$

$$\approx 70\times 65\times(x+28)$$

$$\approx 4550\times(x+28)$$

$$\approx 4550x+127400$$

5. حجم الحاوية :

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2$$

$$\approx(3150x+44100)+(4550x+127400)$$

$$\approx 7700x+171500$$

6. التّحويل :

$$0,5m^3=0,5(100cm)^3=0,5\times(10^2cm)^3$$

$$=0,5\times 10^6cm^3=500000cm^3$$

حتى لا يقل حجم الحاوية عن $0,5m^3$ يجب أن يكون: $7700x+171500\geqslant 500000$

7. حل المتراجحة : $7700x+171500\geqslant 500000$:

$$7700x+171500\geqslant 500000$$

$$7700x\geqslant 500000-171500$$

$$7700x\geqslant 328500$$

$$x\geqslant\frac{328500}{7700}$$

$$x\geqslant\frac{3285}{77}$$

لدينا $\frac{3285}{77}\approx 43$ إذن أدنى قيمة لـ x تحقق الشرط هي $43cm$ (بالتدوير إلى الوحدة).