مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 1 -- جدول التغيرات -- المدة: دقيقتان

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$، جدول تغيراتها كما يلي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

السؤال: ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$؟ وما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 4$؟

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 2 -- جدول الإشارة -- المدة: دقيقتان

إليك جدول إشارة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$+$	

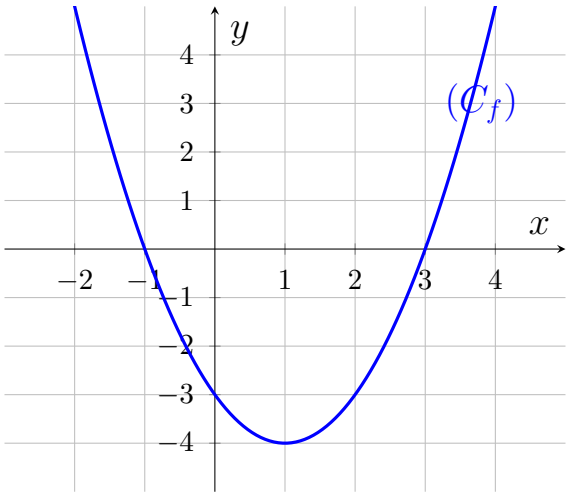
السؤال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة $f(x) \geqslant 0$.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 3 -- قراءة بيانية -- المدة: دقيقتان

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 + bx + c$.



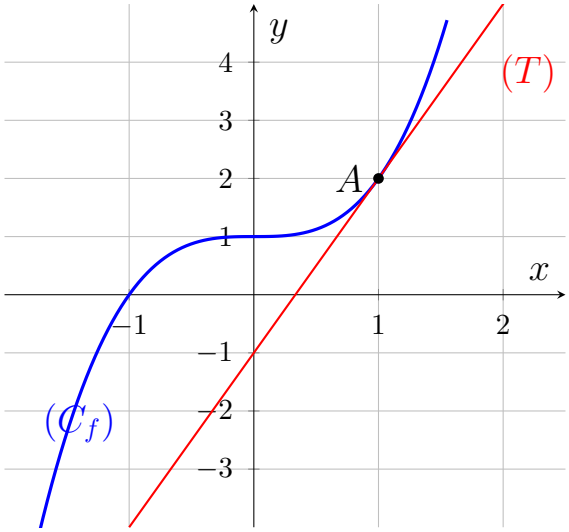
السؤال: عيّن بيانيًا $f'(1)$، ثم حلّ المتراجحة $f(x) < 0$، ثم استنتج قيمتي b و c.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 4 -- المماس -- المدة: دقيقتان

(C_f) منحنى دالة f و (T) مماسه عند النقطة A ذات الفاصلة 1.



السؤال: عيّن $f(1)$ و $f'(1)$، ثم اكتب معادلة للمماس (T).

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 5 -- المستقيمات المقاربة -- المدة: دقيقتان

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$، جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

السؤال: استنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 6 -- المتتاليات الحسابية -- المدة: دقيقتان

(u_n) متتالية حسابية حيث: $u_0 = 3$ و $u_5 = 13$.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	...	...	...	...	13

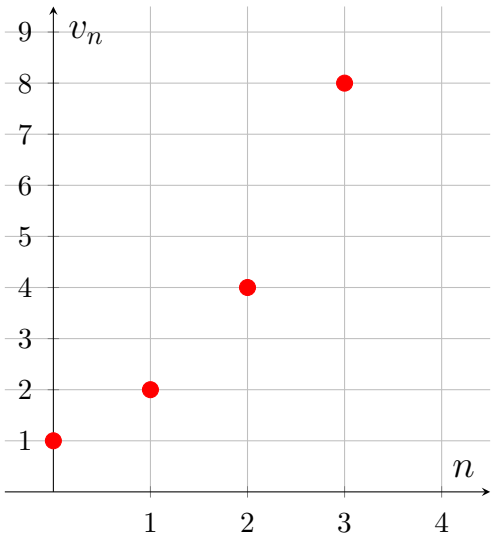
السؤال: أوجد الأساس r، ثم احسب u_{20} والمجموع $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 7 -- المتتاليات الهندسية -- المدة: دقيقتان

الشكل يمثل الحدود الأولى لمتتالية هندسية (v_n):



السؤال: عيّن الأساس q و v_0، ثم احسب v_{10} والمجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_9$.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 8 -- إشارة المشتقة -- المدة: دقيقتان

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، وإشارة دالتها المشتقة كما يلي:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

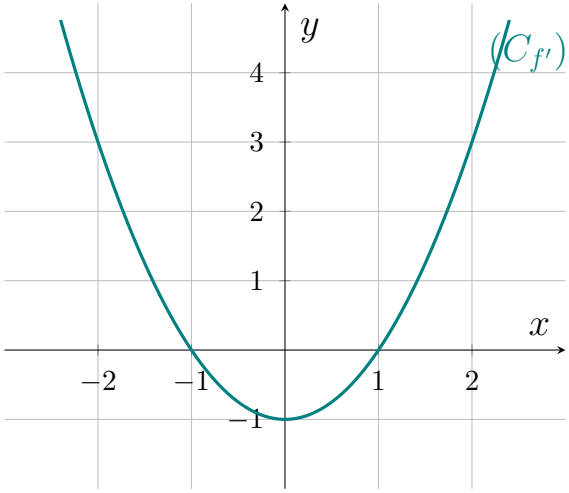
السؤال: كم قيمة حدية محلية تقبلها الدالة f؟ حدّد طبيعتها وفاصلتها مع التعليل.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 9 -- منحنى الدالة المشتقة -- المدة: دقيقتان

المنحنى التالي هو التمثيل البياني **للدالة المشتقة** f' لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$:



السؤال: شكّل جدول تغيرات الدالة f (دون حساب النهايات والقيم)، وعيّن فاصلة القيمة الحدية العظمى المحلية.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 10 -- الدالة الأسية -- المدة: دقيقتان

السؤال: حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$$

(إرشاد: ضع $X = e^{x}$)

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 11 -- الدالة اللوغاريتمية -- المدة: دقيقتان

لتكن الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

x	$-\infty$ $\quad$ -2 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$x-1$	
$x+2$	
$\dfrac{x-1}{x+2}$	

السؤال: أكمل جدول الإشارة ثم عيّن D_g مجموعة تعريف الدالة g.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 12 -- النهايات -- المدة: دقيقتان

السؤال: احسب النهايتين التاليتين:

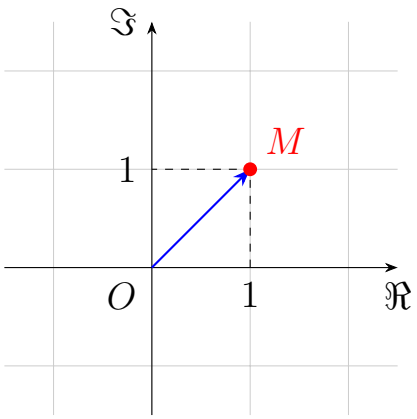
$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x) \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$$

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 13 -- الأعداد المركبة -- المدة: دقيقتان

في المستوي المركب، النقطة M صورة العدد المركب z:



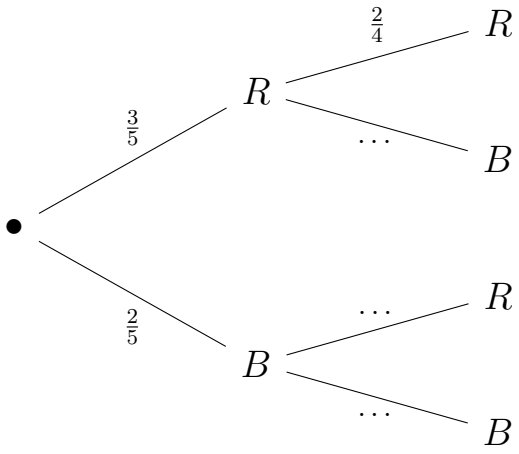
السؤال: اكتب z على الشكل الأسي، ثم احسب z^8.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 14 -- الاحتمالات -- المدة: دقيقتان

كيس به 3 كريات حمراء و 2 بيضاء. نسحب عشوائيًا كريتين على التوالي **دون إرجاع**.



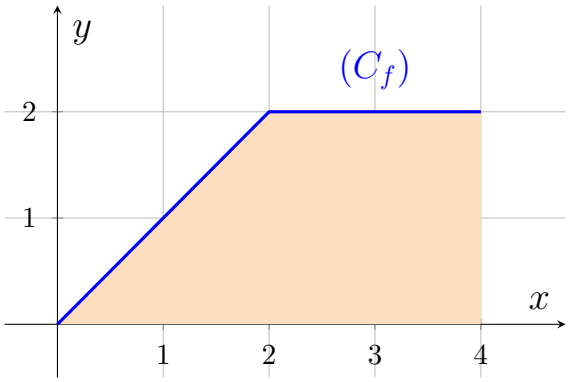
السؤال: أكمل الشجرة، ثم احسب احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 15 -- الحساب التكاملي -- المدة: دقيقتان

(C_f) التمثيل البياني لدالة f معرفة ومستمرة على المجال $[0;4]$:



السؤال: احسب التكامل $I = \int_0^4 f(x)\,dx$، ثم القيمة المتوسطة للدالة f على $[0;4]$.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 16 -- المناقشة البيانية -- المدة: دقيقتان

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$، جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$
	1						

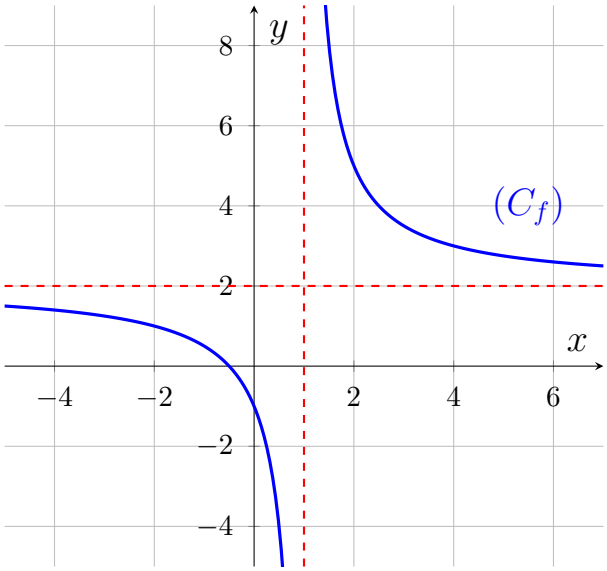
السؤال: عيّن قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = m$ حلّين متمايزين بالضبط.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 17 -- مركز التناظر -- المدة: دقيقتان

(C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.



السؤال: عيّن إحداثيي مركز التناظر Ω للمنحنى (C_f)، ثم احسب $f(1+h)+f(1-h)$ حيث $h\neq 0$.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 18 -- كثير الحدود -- المدة: دقيقتان

$P(x) = ax^2 + bx + c$ كثير حدود حيث $P(0) = 6$، وجدول إشارته:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

السؤال: عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 19 -- تركيب الدوال -- المدة: دقيقتان

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$، جدول تغيراتها:
نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{f(x)}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

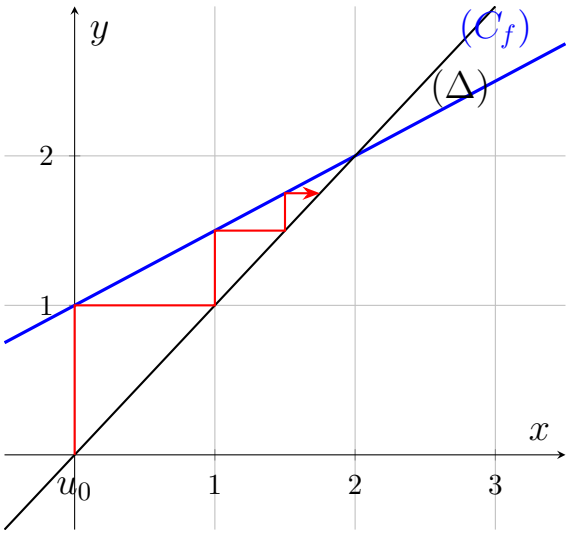
السؤال: شكّل جدول تغيرات الدالة g مع حساب النهايتين والقيمة الحدية.

الإجابة:

مسابقة بين الثانويات -- الرياضيات

السؤال رقم 20 -- المتتاليات التراجعية -- المدة: دقيقتان

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. الشكل يمثل (C_f) والمستقيم $(\Delta) : y = x$.



السؤال: ضع تخمينًا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها، ثم بيّن أن $v_n = u_n - 2$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

الإجابة:

الحلول النموذجية (خاصة بلجنة التحكيم)

رقم	الإجابة:
1	$f(x)=0$: ثلاثة حلول. $f(x)=4$: حل وحيد (في المجال $]2;+\infty[$).
2	$S=[-2;1]\cup]3;+\infty[$.
3	$f'(1)=0$ (ذروة القطع المكافئ)، $f(x)<0 \iff x\in]-1;3[$، $b=-2$ و $c=-3$.
4	$f(1)=2$، $f'(1)=3$ (ميل (T))، $(T): y=3x-1$.
5	$x=1$ مقارب عمودي، $y=2$ مقارب أفقي (بجوار $\pm\infty$).
6	$r=2$، $u_{20}=43$، $S=\dfrac{21(3+43)}{2}=483$.
7	$q=2$، $v_0=1$، $v_{10}=1024$، $v_0+\cdots+v_9=2^{10}-1=1023$.
8	قيمة حدية واحدة: قيمة صغرى محلية عند $x=-1$ (f' تنعدم وتغير إشارتها). عند $x=2$ تنعدم f' دون تغيير إشارتها فلا توجد قيمة حدية.
9	f متزايدة على $[-1;+\infty[$ وعلى $]-\infty;-1]$، ومتناقصة على $[-1;1]$. القيمة العظمى المحلية عند $x=-1$.
10	$X^2-3X+2=0\Rightarrow X=1$ أو $X=2$، ومنه $S=\{0;\ \ln 2\}$.
11	$\frac{x-1}{x+2}$: موجبة على $]-\infty;-2[$، سالبة على $]-2;1]$، موجبة على $[1;+\infty[$. $D_g=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.
12	$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}=3$، $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$.
13	$z=1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$، $z^8=(\sqrt{2})^8e^{i2\pi}=16$.
14	فروع الشجرة: بعد R: R بـ $\frac{2}{4}$، B بـ $\frac{2}{4}$؛ بعد B: R بـ $\frac{3}{4}$، B بـ $\frac{1}{4}$. $P=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$.
15	$I=2+4=6$ (مساحة مثلث + مستطيل)، القيمة المتوسطة $=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.
16	$m\in]-1;1]\cup\{3\}$.
17	$\Omega(1;2)$، $f(1+h)+f(1-h)=4$ (لأن $f(x)=2+\frac{3}{x-1}$).
18	$P(x)=a(x+1)(x-3)$ و $P(0)=-3a=6$ ومنه $a=-2$، $b=4$، $c=6$.
19	$g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$ لها إشارة f': g متزايدة على $]-\infty;1]$ ومتناقصة على $[1;+\infty[$، $g(1)=e^2$، $\lim_{\pm\infty}g=0$.
20	(u_n) متزايدة ومتقاربة نحو 2. $v_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1-2=\frac{1}{2}(u_n-2)=\frac{1}{2}v_n$: هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.