«

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي **الدورة: 2026**

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات **المدة: 04 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=2u_n+3n+4$

أ) احسب u_1 ، u_2

ب) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n \geq 3n+1$ ثمّ استنتج نهاية المتتالية (u_n)

جـ) حدّد اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\ln(u_n+3n+7)$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\ln 2$ ، يُطلب حساب حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّ: $u_n=8\times 2^n-3n-7$

3) نضع: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

- احسب S_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ: $T_n=2^{n+4}-\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{2}n-15$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريّات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها: كريّتان بيضاوان مرقّمتان بـ: 0 ، 2 وأربع كريّات حمراء مرقّمة بـ: 0 ، 1 ، 2 ، 3 وأربع كريّات خضراء مرقّمة بـ: 1 ، 2 ، 3 ، 4

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات في آن واحد ونعتبر الحوادث:

A: « سحب كريّة حمراء على الأقل » ، B: « سحب ثلاث كريّات جداء أرقامها معدوم »

C: « سحب ثلاث كريّات من نفس اللون » ، D: « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أكبر من أو يساوي 8 »

1) أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمالات الحوادث A ، B و C على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(D)=\frac{17}{120}$ وأنّ: $P(C\cap D)=\frac{1}{60}$

جـ) استنتج حساب احتمال الحادثة E: « سحب ثلاث كريّات مجموع أرقامها أصغر من أو يساوي 7 »

2) X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ عملية سحب لثلاث كريّات، عدد الكريّات التي تحمل رقما فرديا.

- عيّن قانون احتمال المتغيّر العشوائي X ثمّ احسب أمله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثّالث: (05 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ... $11x-5y=7$ ذات المجهولين الصّحيحين x و y

أ) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلّا للمعادلة (E) فإنّ $y\equiv 3[11]$ ثمّ حلّ المعادلة (E)

ب) عيّن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقّق: $|y-x|\leq 5$

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $a=11n+3$ ، $b=5n+2$ و $PGCD(a;b)=d$

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عيّن الثنائيات $(a;b)$ التي من أجلها يكون $d=7$

3) **أ)** ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 11

ب) استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $a^b\equiv 9[11]$

جـ) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $3^{1447}+a^b+a-b-9\equiv 0[11]$ وَ $2015<n<2037$

4) λ عدد طبيعي يُكتب $\overline{5623}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ، اكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

التمرين الرّابع: (07 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1+(1-x-x^2)e^{-x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) **أ)** احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2) **أ)** بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=(x^2-x-2)e^{-x}$

ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في المجال $]-1,7\ ;-1,6[$

4) **أ)** عيّن معادلة لـ (T) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

ب) احسب $f(-2)$ ثمّ ارسم (T) و (c_f)

جـ) عيّن بيانيا قيم العدد الحقيقي m حتى يكون للمعادلة: $f(x)=m$ حلان سالبان تماما.

5) **أ)** تحقّق أنّ الدّالة $H:x\mapsto(x^2+3x+2)e^{-x}$ أصلية للدّالة $h:x\mapsto(1-x-x^2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ب) $\mathscr{A}(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y=0$ ، $x=\alpha$ و $x=0$

- احسب $\mathscr{A}(\alpha)$ ثمّ بيّن أنّ: $\mathscr{A}(\alpha)=\dfrac{4+\alpha^3}{1-\alpha-\alpha^2}$ ، $\mathscr{A}(\alpha)$ مقدرة بوحدة المساحة.

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

1) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n-3\times 2^n$

- احسب u_1 ، u_2 ثمّ حدّد اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n)

2) (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n}{2^n}+3$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$ ، يُطلب تعيين حدّها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ثمّ بيّن أنّ: $u_n=4-3\times 2^n$

3) نضع: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

أ) احسب S_n بدلالة n ثمّ استنتج نهاية S_n

ب) بيّن أنّه: من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $T_n=4n+7-6\times 2^n$

جـ) احسب بدلالة n المجموع L_n حيث: $L_n=T_0+T_1+\cdots+T_n$

التمرين الثّاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 11 كريّة متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس، منها:

كريّتان بيضاوان، خمس كريّات حمراء، ثلاث كريّات خضراء وكريّة واحدة سوداء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريّات على التوالي دون إرجاع ونعتبر الحوادث:

A : « سحب ثلاث كريّات من نفس اللّون » ، B : « سحب كريّة واحدة بيضاء فقط »

C : « سحب كريّة حمراء على الأكثر » ، D : « سحب كريّتين حمراوين على الأقل »

أ) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$ و $P(D)$ احتمالات الحوادث A ، B ، C و D على الترتيب.

ب) بيّن أنّ: $P(A\cap D)=\dfrac{2}{33}$ ثمّ استنتج حساب $P(A\cup D)$

2) نفرض أنّ عدد الكريّات السّوداء في الكيس هو n حيث: $n\geq 2$ ونسحب منه كريّتين على التوالي مع الإرجاع.

- عيّن قيمة n حتى يكون احتمال سحب كريّتين سوداوين يساوي $\dfrac{1}{4}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) **أ)** عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 1447 على 7 وباقي القسمة الإقليدية للعدد 2687 على 13

ب) برّر أنّ العدد 1447 أوليّ ثمّ عيّن القواسم الطبيعية للعدد 2894

جـ) جِد الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقّق: $x(x+y)=2894$

2) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $a=7n+5$ ، $b=13n+9$ و $PGCD(a;b)=d$

- عيّن القيم الممكنة للعدد d ثمّ حدّد قيم n التي من أجلها يكون $d=2$

3) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $A=14n^2+17n+5$ و $B=26n^2+31n+9$

أ) بيّن أنّ العدد $(2n+1)$ يقسم كلاّ من العددين A و B

ب) استنتج بدلالة n وحسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

4) من أجل $d=1$ ، احسب بدلالة n المضاعف المشترك الأصغر للعددين A و B

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f الدّالة المعرّفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{1}{x-x\ln x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) احسب النهايات: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$ ، فسّر النتائج هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x$ مقارب مائل لـ (c_f)

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (c_f) و (Δ)

3) أ) بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{\ln x}{(x-x\ln x)^2}$

ب) نقبل أنّ إشارة $f'(x)$ موّضحة في الجدول المقابل

x	0		α		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

- تحقّق أنّ $0,4<\alpha<0,5$

جـ) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

4) أ) بيّن أنّ (c_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ، يُطلب تعيين معادلة له.

ب) أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا β في المجال $]3\,;\,3,1[$

5) أ) ارسم (Δ) ، (T) و (c_f) (نأخذ: $f(\alpha)\simeq 1,7$)

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x-x\ln x)=1$

6) h الدّالة المعرّفة على $]0;e[$ بـ: $h(x)=\ln(1-\ln x)$

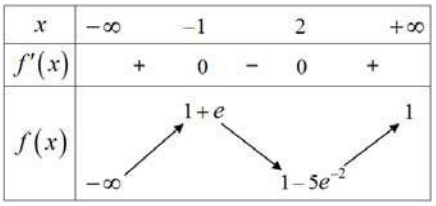
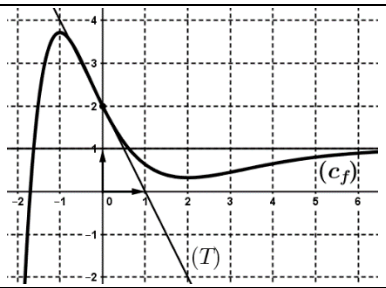
- احسب $h'(x)$ ثمّ استنتج حساب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=\dfrac{1}{e}$ ، $y=x$ و $x=1$

	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة مجزأة	العلامة
	التمرين الأول (04 نقاط)		
(1	أ) $u_1=6$ ، $u_2=19$	$0,25\times 2$	2
	ب) البرهان بالتراجع: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n\geq 3n+1$	$0,5$	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$	$0,25$	
	ج) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=u_n+3n+4$	$0,25$	
	(u_n) متزايدة تماما.	$0,5$	
(2	أ) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $v_{n+1}=v_n+\ln 2$	$0,25+0,5$	$1,25$
	(v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ ، $v_0=3\ln 2$		
	ب) $v_n=n\ln 2+3\ln 2$ ، $u_n=8\times 2^n-3n-7$	$0,25\times 2$	
(3	$S_n=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)(n+1)(n+6)$	$0,5$	$0,75$
	$T_n=2^{n+4}-\frac{3}{2}n^2-\frac{17}{2}n-15$	$0,25$	
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
(1	أ) $P(A)=\frac{C_4^1\times C_6^2+C_4^2\times C_6^1+C_4^3}{C_{10}^3}=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$	$0,5\times 3$	$2,75$
	$P(B)=\frac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{8}{15}$ ، $P(C)=\frac{C_4^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$		
	ب) $P(D)=\frac{17}{120}$ ، $8=1+3+4=2+2+4=3+3+2$	$0,5\times 2$	
	$9=2+3+4$, $10=3+3+4$		
	$P(C\cap D)=\frac{1}{60}$ ، $C\cap D=\{\{1;3;4\},\{2;3;4\}\}$		
	ج) $P(E)=1-P(D)=\frac{103}{120}$	$0,25$	
(2	$E(X)=\frac{6}{5}$ ،	$0,25\times 5$	$1,25$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

	التمرين الثالث (05 نقاط)		
(1	أ) $11x-5y=7$ تكافئ $5y=11x-7$ ومنه: $y\equiv 3[11]$	$0,25$	$1,25$
	$(x;y)=(5k+2;11k+3)$, $k\in\mathbb{Z}$	$0,5$	
	ب) $(x;y)\in\{(-3;-8),(2;3)\}$	$0,25\times 2$	
(2	أ) $d\in\{1;7\}$	$0,25\times 2$	1
	ب) $(a;b)=(77k'+14;35k'+7)$, $k'\in\mathbb{N}$	$0,5$	

3)	أ)	$k \in \mathbb{N}$ | $5k$ | $5k+1$ | $5k+2$ | $5k+3$ | $5k+4$ $n=$ | $3^n \equiv$ | 1 | 3 | 9 | 5 | 4 | $[11]$	$0,25\times 5$
	ب)	من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $a^b \equiv 9[11]$	$0,25$
	جـ)	$3^{1447}+a^b+a-b-9\equiv 0[11]$ و $2015<n<2037$ $n\equiv 2[11]$ و $2015<n<2037$ ومنه: $n=2026$	$0,25+0,5$
4)		$\lambda = 2026$ ويُكتب $\overline{13214}$ في نظام التعداد ذي الأساس 6	$0,25\times 2$
التمرين الرّابع (07 نقاط)			
1)	أ)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	$0,25$
	ب)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ، (c_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $y=1$	$0,25\times 2$
2)	أ)	من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=(x^2-x-2)e^{-x}$	$0,75$
	ب)	إشارة $f'(x)$ f متناقصة تماماعلى $[-1\,;2]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1\,;-\infty[$ و $]2\,;+\infty[$	$0,5$ $0,25\times 2$
		جدول التغيّرات: 	$0,5$
3)		الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[-1,7\,;-1,6]$ و $f(-1,6)\simeq 1,2$ ، $f(-1,7)\simeq -0,04$ ومنه: المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α في $]-1,7\,;-1,6[$	$0,25\times 3$
4)	أ)	$(T): y=-2x+2$	$0,5$
	ب)	$f(-2)=1-e^2$ رسم (T) رسم (c_f) 	$0,25$ $0,25$ $0,5$
	جـ)	للمعادلة $f(x)=m$ حلان سالبان تماما من أجل $2<m<1+e$	$0,5$
5)	أ)	من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ ، $H'(x)=h(x)$	$0,5$
	ب)	$\mathcal{A}(\alpha)=2-\alpha-(\alpha^2+3\alpha+2)e^{-\alpha}$ ، $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{\alpha^3+4}{1-\alpha-\alpha^2}$	$0,25+0,5$

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحلّ الصّحيحة مع التقيّد بسلّم التنقيط.

	عناصر الإجابة (الموضوع الثاني)	العلامة مجزأة	العلامة
	التمرين الأول (04 نقاط)		
1)	$u_1=-2$ ، $u_2=-8$	$0,25\times 2$	1
	من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=-3\times 2^n$ (u_n) متناقصة تماما.	$0,25\times 2$	
2)	أ) المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، $v_0=4$	$0,25+0,5$	1,5
	ب) $v_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $u_n=4-3\times 2^n$	$0,5+0,25$	
3)	$S_n=8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ ، $T_n=-6\times 2^n+4n+7$	$0,5\times 2$	1,5
	$L_n=(n+1)(2n+7)-6\left(2^{n+1}-1\right)=-12\times 2^n+2n^2+9n+13$	$0,5$	
	التمرين الثاني (04 نقاط)		
1)	أ) $P(A)=\frac{A_5^3+A_3^3}{A_{11}^3}=\frac{1}{15}$ ، $P(B)=\frac{3A_2^1\times A_9^2}{A_{11}^3}=\frac{24}{55}$ $P(C)=\frac{3A_5^1\times A_6^2+A_6^3}{A_{11}^3}=\frac{19}{33}$ ، $P(D)=\frac{3A_5^2\times A_6^1+A_5^3}{A_{11}^3}=\frac{14}{33}$	$0,75\times 4$	3,5
	ب) $P(A\cap D)=\frac{A_5^3}{A_{11}^3}=\frac{2}{33}$ ، $P(A\cup D)=\frac{71}{165}$	$0,25\times 2$	
2)	$\frac{n^2}{(n+10)^2}=\frac{1}{4}$ ومنه: $n=10$	$0,25\times 2$	0,5
	التمرين الثالث (05 نقاط)		
1)	أ) $1447=7\times 206+5$ ، $1447\equiv 5[7]$ $2687=13\times 206+9$ ، $2687\equiv 9[13]$	$0,25$ $0,25$	2
	ب) تبرير أنّ 1447 أوليّ.	$0,5$	
	القواسم الطبيعية للعدد 2894 هي: 1 ، 2 ، 1447 ، 2894	$0,5$	
	جـ) $(x;y)\in\{(1;2893),(2;1445)\}$	$0,25\times 2$	
2)	$d\in\{1;2\}$	$0,25\times 2$	1
	من أجل $d=2$ نجد: $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$	$0,5$	
3)	أ) $A=(2n+1)(7n+5)=a(2n+1)$ $B=(2n+1)(13n+9)=b(2n+1)$	$0,5$ $0,5$	1,5

	0,25 0,25	**ب)** من أجل $n=2k$، $k\in\mathbb{N}$ فإنّ: $d=1$ و $PGCD(A,B)=2n+1$ من أجل $n=2k+1$، $k\in\mathbb{N}$ فإنّ: $d=2$ و $PGCD(A,B)=2(2n+1)$	
0,5	0,5	**4)** من أجل $d=1$ فإنّ: $PPCM(A,B)=(2n+1)(7n+5)(13n+9)$	
التمرين الرّابع (07 نقاط)			
1,5	0,25×3	**1)** أ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to e^{<}} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to e^{>}} f(x)=-\infty$	
	0,25×2	(c_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما: $x=0$ ، $x=e$	
	0,25	**ب)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	
0,75	0,25	**2)** أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$	
	0,25×2	**ب)** (c_f) أعلى (Δ) لمّا $0<x<e$ ، (c_f) أسفل (Δ) لمّا $x>e$	
1,25	0,5	**3)** أ) من أجل $x\in]0;e[\cup]e;+\infty[$ ، $f'(x)=1+\dfrac{\ln x}{(x-x\ln x)^2}$	
	0,25×2	**ب)** الدالة f' مستمرة على المجال $[0,4\ ;\ 0,5]$ و $f'(0,4)\simeq -0,56$ ، $f'(0,5)\simeq 0,03$ ، ومنه: $0,4<\alpha<0,5$	
	0,25	**جـ)** جدول التغيّرات:	
1,25	0,25	أ) $f'(x)=1$ تكافئ $x=1$	
	0,25	$(T): y=x+1$	
	0,25×3	**4)** ب) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[3\ ;\ 3,1]$ و $f(3)\simeq -0,38$ ، $f(3,1)\simeq 0,65$ ومنه: للمعادلة $f(x)=0$ حلّ وحيد β في المجال $]3\ ;\ 3,1[$	
1,75	0,25 0,25 0,5	**5)** أ) رسم (T) رسم (Δ) رسم (c_f)	

	$0,25\times 3$	**ب)** $m(x-x\ln x)=1$ تكافئ $f(x)=x+m$ $m<0$ أو $m=1$: للمعادلة حلّ واحد ، $0\le m<1$: ليس للمعادلة حل. $m>1$: للمعادلة حلّان.	
6)	$0,25$	أ) من أجل كلّ x من $]0;e[$ بـ: $h'(x)=\dfrac{-1}{x-x\ln x}$	$0,5$
	$0,25$	**ب)** $\mathcal{A}=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\dfrac{dx}{x-x\ln x}=(\ln 2)u.a$	

ملاحظة: تُقبل جميع طرائق الحلّ الصّحيحة مع التقيّد بسلّم التنقيط.